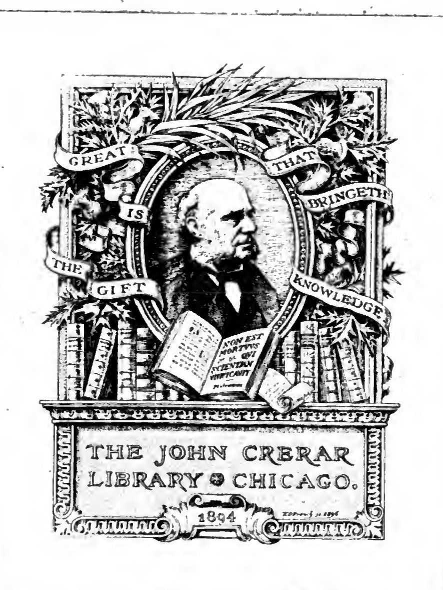
H. MÜLLER

DIE MATHEMATIK AUF DEN GYMNASIEN UND REALSCHULEN

A I

UNTERSTUFE




GREAT
IS
THE
GIFT
THAT
BRINGETH
KNOWLEDGE
NON EST
MORTVVS
QVI
SCIENTIAM
VIVIFICAVIT
THE JOHN CRERAR
LIBRARY CHICAGO.
1894

Die Mathematik

auf den

Gymnasien und Realschulen.

Für den Unterricht dargestellt

von

Professor **Heinrich Müller,**

Oberlehrer am Königl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg.

Erster Teil: **Die Unterstufe.**

(Lehraufgabe der Klassen Quarta bis Unter-Sekunda.)

Dritte Auflage.

Ausgabe A:

Für Gymnasien und Progymnasien.



Leipzig und Berlin,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1905.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch ist für die Hand des Schülers bestimmt und soll ihn bei der Wiederholung des in der Schule durchgenommenen Lehrstoffs unterstützen; es soll ihm aber auch die Möglichkeit bieten, Lücken in seinem Wissen, die auf irgendeinem Wege entstanden sind, ohne fremde Hilfe auszufüllen, und daher sind bei der Darstellung des Lehrstoffs die Grenzen etwas weiter gezogen worden, als dies ein Leitfaden erfordern würde. Von einem zusammenhängenden Aufbau des Lehrstoffs und einer folgerichtig durchgeführten Entwickelung der Beweise, wie sie der Verfasser in seiner ausführlichen Elementar-Planimetrie*) gegeben hat, ist Abstand genommen worden, um dem Lehrer völlig freie Hand zu lassen.

Die gleiche Absicht leitete den Verfasser bei den ersten Abschnitten (Nr. 1 bis Nr. 3) über die Einführung in die Planimetrie. Das wenige, das hier über die Entwickelung der Grundbegriffe, insbesondere der Geraden und der Ebene, Aufnahme gefunden hat, ist nur dazu bestimmt, das Auftreten einer Lücke gleich im Anfang zu verhüten. Einen weiteren Anspruch erhebt die gegebene Darstellung nicht, und daher wird später darauf nirgends Bezug genommen. Es bleibt demnach dem Lehrer überlassen, ob er den hier angedeuteten Weg einschlagen will oder ein anderes Verfahren vorzieht.

Charlottenburg, im Juni 1899.

*) Die Elementar-Planimetrie. Ein methodisches Lehrbuch. Leipzig, B. G. Teubner.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Bestimmung der Lehrpläne von 1901, daß der planimetrische Unterricht in der Quarta einen propädeutischen Charakter trage, erforderte eine Umarbeitung der ersten planimetrischen Abschnitte. Hierbei hat die Parallelentheorie ihren Platz erst bei der Lehre von den Parallelogrammen gefunden. Von der Lehraufgabe der Untertertia ab sind wesentliche Änderungen nicht vorgenommen worden.

Der Übungsstoff hat eine starke Vermehrung erfahren. Insbesondere wurden zahlreiche Herstellungsaufgaben neu aufgenommen, deren Auflösung durch eine Anwendung der algebraischen Gesetze auf die Planimetrie bedingt ist.

Der planimetrische Lehr- und Übungsstoff der Untersekunda ist den neuen Lehrplänen entsprechend erweitert worden, während der trigonometrische und stereometrische Abschnitt fortgeblieben ist.

Charlottenburg, im September 1901.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die neue Auflage weist gegenüber der vorhergehenden nur geringe Veränderungen auf. Infolge mehrerer an den Verfasser gelangter Wünsche wurden die beiden ersten Kongruenzsätze umgestellt und der Beweis des Kongruenzsatzes SSW umgearbeitet. An zahlreichen Stellen wurde der Ausdruck etwas abgeändert. Die Anregung hierzu gab die Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Lessing-Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1904, von J. Schlesinger „Über die Sprache in den mathematischen Schulbüchern". Wenn auch der Verfasser bei vielen der gemachten Ausstellungen Herrn Schlesinger nicht beistimmt, weil er es für unmöglich hält, der lebenden Sprache das Recht zu nehmen, den Umfang und die Bedeutung einzelner Wörter umzuwandeln, und weil er jeder Wissenschaft das Recht zugesteht, sich ihre termini technici zu bilden und zu prägen, so konnte er sich der Berechtigung einzelner Einwände doch nicht verschließen.

Zugleich mit lebhaftem Dank für das Interesse, das sich in einer ganzen Reihe freundlicher Zuschriften seitens der Herren Fachgenossen zeigte, sei von neuem die Versicherung ausgesprochen, daß jeder Verbesserungsvorschlag herzlich willkommen geheißen und für Neuauflagen des Buches ernstlich geprüft werden wird.

Charlottenburg, im November 1904.
(Kaiserin Augusta-Gymnasium.)

Hch. Müller.

Inhaltsübersicht.

Abschnitt I. Planimetrie.

Erster Teil. Von der Gleichheit der Größen.

Kapitel 1. Die Grundbegriffe.

Kapitel 2. Die Lehre von den Winkeln.

Kapitel 3. Die Kongruenz der Dreiecke.

Kapitel 4. Lehre von den Parallelen. Das Parallelogramm und das Trapez.

Kapitel 5. Die Kreislehre.

Kapitel 6. Der Inhalt geradliniger Figuren.

Zweiter Teil. Die Proportionalität der Größen.

Kapitel 7. Die Proportionalität der Strecken.

Kapitel 8. Die Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

Kapitel 9. Berechnung des Kreises.

Abschnitt II. Arithmetik.

Erster Teil. Die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe.

Kapitel 1. Die 4 Grundrechnungsarten.

Kapitel 2. Verbindung der 4 Rechnungsarten.

Kapitel 3. **Die Brüche und Proportionen.**

Kapitel 4. **Gleichungen ersten Grades.**

Zweiter Teil. Die Rechnungsarten dritter Stufe.

Kapitel 5. **Potenzen mit ganzen positiven Zahlen.**

Kapitel 6. **Wurzeln.**

Kapitel 7. **Erweiterung des Potenzbegriffs.**

Kapitel 8. **Die Logarithmen.**

Kapitel 9. **Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.**

Abschnitt I.

Planimetrie.

Erster Teil. Von der Gleichheit der Größen.

Kapitel 1.

Die Grundbegriffe.

Nr. 1. Die räumlichen Gebilde.

a) Aus dem Zeichenunterricht sind die einfachen Körper Würfel, vierseitige Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel bekannt.

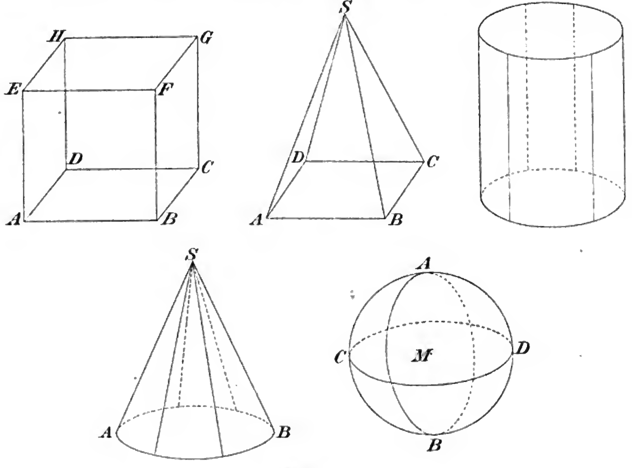


Fig. 1—5.

Durch die Betrachtung und Beschreibung dieser Körper lassen sich die folgenden Erklärungen gewinnen:

Erklärung 1. Ein **Körper** ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes.

Erklärung 2. Die Begrenzungen eines Körpers heißen **Flächen.** Sämtliche Begrenzungsflächen eines Körpers bilden seine **Oberfläche.**

Zusatz 1. Sichtbar ist bei einem Körper nur die Oberfläche, welche seinen Innenraum gegen den Außenraum abgrenzt. Die Oberfläche gehört beiden Räumen an, ohne selbst einen Raum einzunehmen, besitzt also keine Dicke und ist ohne den Körper nicht vorstellbar.

Zusatz 2. Ein Körper wird durch Flächen geteilt.

Erklärung 3. Die Begrenzungen von Flächen heißen **Linien.**

Zusatz 1. Die Linie gehört beiden Flächen an, welche sie gegeneinander abgrenzt (und ist ebenso wie die Fläche ohne den Körper nicht vorstellbar).

Zusatz 2. Eine Fläche wird durch Linien geteilt.

Erklärung 4. Die Begrenzungen einer Linie heißen **Punkte.**

Zusatz 1. Zur vollständigen Begrenzung einer Linie sind zwei Punkte erforderlich.

Zusatz 2. Eine Linie wird durch Punkte geteilt.

b) Die Raumgrößen unterscheiden sich durch die Anzahl ihrer Ausdehnungen.

1. Ein Körper hat drei Ausdehnungen.

Wie nennt man die Ausdehnungen a) des Schulzimmers, b) eines Ziegelsteins, c) einer Grube?

2. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen.

Wie nennt man die Ausdehnungen a) des Fußbodens und b) einer Wandfläche in dem Schulzimmer?

Welche Ausdehnung fehlt bei einer Fläche?

3. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung.

Wie nennt man die Ausdehnung a) der größeren Tischkante, b) der kleineren Tischkante, c) der Schnittkante zweier Wandflächen? Welche gemeinsame Bezeichnung kommt diesen drei Ausdehnungen zu?

Welche Ausdehnungen fehlen bei einer Linie?

4. Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Ein Punkt ist also nur eine im Raume gedachte Stelle.

Zusammenfassung: 1. Der Körper besitzt die drei Ausdehnungen Länge, Breite und Höhe (Dicke).

2. Die Fläche besitzt die Ausdehnungen Länge und Breite.

3. Die Linie besitzt nur eine Ausdehnung, die Länge.

c) Die bildlichen Darstellungen von Körpern, Flächen und Linien heißen Figuren.

Nr. 2. Entstehung der räumlichen Gebilde.

a) Welches Gebilde entsteht, wenn a) die Spitze eines Bleistifts auf einem Blatt Papier, b) die Spitze eines Kreidestücks auf der Wandtafel, c) die Spitze einer Stecknadel auf einer Wachskugel fortbewegt wird?

Bewegt sich ein Punkt von einem Ort des Raumes nach einem anderen, so beschreibt er eine Linie.

b) Welches Gebilde beschreibt a) die Schneide eines Messers, wenn sie sich durch einen Apfel oder ein Stück Brot, b) die Schneide einer Säge, wenn sie sich durch ein Stück Holz, c) der Rand eines Wasserglases, wenn er sich durch weichen Ton bewegt?

Bewegt sich eine Linie so, daß sie immer wieder neue Lagen einnimmt, so beschreibt sie eine Fläche.

c) Welches Gebilde beschreibt a) ein Brett, wenn es in weichem Ton vorwärts geschoben wird? b) ein Spaten, der senkrecht in die Erde gesteckt ist, wenn er schräg emporgedrückt wird? c) die Rückwand einer Schublade, wenn diese herausgezogen wird? d) die Grundfläche eines Holzzylinders, wenn dieser in die Erde hineingetrieben wird?

Wie kann man sich in den Fällen a—d davon überzeugen, daß das beschriebene Gebilde ein Körper ist?

Bewegt sich ein Flächenstück so, daß es nicht (wie eine gedrehte Scheibe) in sich selbst verläuft oder stets auf einer zweiten Fläche bleibt, so beschreibt es einen Körper.

d) Die Bewegung eines Körpers läßt sich dadurch veranschaulichen, daß man z. B. eine Anzahl gleicher a) Ziegelsteine aneinander legt, b) Hefte aufeinander schichtet, c) Metallscheiben übereinander legt.

Durch Bewegung eines Körpers entsteht wieder ein Körper.

Zusammenfassung von Nr. 1 und 2. Es gibt nur 4 Formen räumlicher Gebilde: Körper, Fläche, Linie und Punkt.

Erklärung. Die Wissenschaft, welche sich mit den räumlichen Gebilden, ihrer Lage, Gestalt und Größe beschäftigt, wird **Raumlehre** oder Geometrie genannt.

Nr. 3. Einteilung der Flächen und Linien. Ebene und Gerade.

a) Wodurch unterscheidet sich eine Kante eines Würfels oder einer Pyramide von der Linie, welche die Grundfläche eines Zylinders oder Kegels begrenzt?

Man unterscheidet gerade und krumme Linien.

Läßt sich eine Kante des Würfels so auf eine Kante der Pyramide legen oder auf ihr hin- und herschieben, daß keiner ihrer Teile aus dieser seitlich heraustritt? Läßt sich in gleicher Weise die Begrenzungslinie der Grundfläche des Kegels auf die entsprechende Linie des Zylinders legen und auf ihr hin- und herschieben? Unter welcher Bedingung würde dies allein möglich sein?

Behält eine gerade Linie ihre Lage im Raume unverändert bei, wenn sie um zwei ihrer Punkte gedreht wird? Ist dies auch bei einer krummen Linie der Fall? Wodurch also unterscheidet sich eine gerade Linie von jeder krummen?

Erklärung 1. Eine Linie, die bei der Drehung um zwei ihrer Punkte ihre Lage im Raume nicht ändert, wird **gerade Linie** oder **Gerade** genannt.

Zusatz 1. Die Gerade ist nach zwei Seiten hin unbegrenzt.

Zusatz 2. Zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich, d. h. eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

Eine Gerade kann daher durch zwei ihrer Punkte bezeichnet werden. Daneben ist auch die Bezeichnung durch einen Buchstaben des großen deutschen Alphabets im Gebrauch.

Folgerung. Zwei Geraden können sich nur in einem Punkte schneiden.

Erklärung 2. Bewegt sich ein Punkt P auf der durch A und B gehenden Geraden von A nach B, ohne umzukehren, so beschreibt er die Gerade in der Richtung AB. Bewegt er sich dagegen von B nach A, so beschreibt er die Gerade in der Richtung BA. Die Richtungen AB und BA heißen einander entgegengesetzt.

b) Wodurch unterscheidet sich eine der Flächen des Würfels oder der Pyramide von dem Mantel (der Seitenfläche) eines Zylinders oder Kegels oder von der Oberfläche einer Kugel?

Man unterscheidet ebene und krumme Flächen.

Läßt sich die Kante eines Lineals auf eine Würfel- oder Pyramidenfläche so hinlegen und auf ihr so herumschieben, daß sich nirgends eine Lücke zwischen den beiden Körpern zeigt?

Läßt sich die Kante eines Lineals in gleicher Weise auch auf den Mantel eines Zylinders oder Kegels legen? Bei welcher Lage der Kante tritt keine Lücke auf? Bleibt die Kante auch bei beliebiger Verschiebung des Lineals ganz oder doch zum Teil auf dem Mantel? Wieviel Punkte hat die Kante mit dem Mantel gemein, wenn sie nicht wenigstens zum Teil auf demselben liegt? Wieviel Punkte kann die Kante mit einer Kugelfläche gemein haben?

Wodurch also unterscheidet sich eine ebene Fläche von einer krummen?

Erklärung 3. Eine Ebene ist eine Fläche, welche alle Geraden zwischen beliebigen Punkten der Fläche **ganz** enthält.

Zusatz. Der Teil der Raumlehre, der sich mit den in Ebenen liegenden Gebilden beschäftigt, wird **Planimetrie** genannt.

Nr. 4. Strecken. Addition und Subtraktion von Strecken.

Erklärung 1. Ein Strahl ist ein einseitig begrenzter Teil einer geraden Linie. Der Begrenzungspunkt heißt Ausgangspunkt des Strahles.

Erklärung 2. Eine **Strecke** ist ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden.

Zusatz. Die Größe einer Strecke heißt auch Länge der Strecke oder Entfernung der beiden Endpunkte voneinander.

Eine Strecke wird entweder durch ihre beiden Endpunkte oder durch einen Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet.

Erklärung 3. Zwei Strecken heißen gleich (gleichlang oder gleichgroß), wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß ihre Endpunkte zusammenfallen.

Wann heißt eine Strecke kleiner (<) und wann heißt sie größer (>) als eine andere Strecke?

Als Maßeinheit für die Länge einer Strecke dient das Meter (cm, mm, km) und als Maßstab ein Lineal (Meßband), von dem eine Kante in Zentimeter und Millimeter eingeteilt ist.

Erklärung 4. (S. Fig. 6.) Wird eine Strecke AB über B hinaus um die Länge einer zweiten Strecke CD fortgesetzt, so sagt man, CD sei zu AB addiert oder an AB angetragen, und bezeichnet AD = AB + CD als Summe von AB und CD.

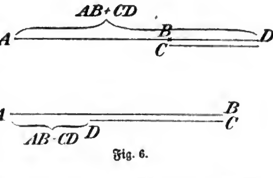


Fig. 6.

Erklärung 5. Legt man die Strecke CD so auf AB, daß C auf B und D zwischen A und B liegt, so sagt man, CD sei von AB subtrahiert oder auf AB von B aus abgetragen, und bezeichnet AD [= AB − CD] als die Differenz der Strecken AB und CD.

Erklärung 6. Werden zwei gleiche Strecken addiert, so heißt der gemeinsame Punkt Mitte der entstehenden Strecke.

Nr. 5. Der Kreis.

Wird ein Strahl um seinen Ausgangspunkt M gedreht, so beschreibt jeder Punkt P des Strahles eine Linie, deren sämtliche Punkte von M die Entfernung MP(r) besitzen. Diese Linie ist eine krumme Linie. (S. Fig. 7.)

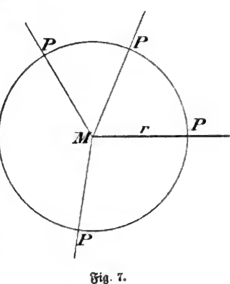


Fig. 7.

Erklärung 1. Der Kreis ist eine krumme Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte gleichweit entfernt sind.

Zusatz. Die Entfernung eines Punktes des Kreises von dem festen Punkte (M) wird **Halbmesser** genannt. Die Verbindungslinie des festen Punktes mit einem Punkte des Kreises heißt Radius.

Folgerung. Alle Radien eines Kreises sind gleichgroß.

Erklärung 2. Geht die Verbindungslinie zweier Punkte P und Q des Kreises durch den festen Punkt M, so wird sie als **Durchmesser** bezeichnet.

Folgerung 1. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleichgroß.

Folgerung 2. Der Punkt M ist die Mitte aller Durchmesser und wird deshalb als **Mittelpunkt** des Kreises bezeichnet.

Zusatz. Ein Kreis ist durch seinen Mittelpunkt und seinen Halbmesser vollständig bestimmt.

Ein Punkt, dessen Entfernung von M
gleich dem Halbmesser ist, liegt auf dem Kreise,
größer als der " " " außerhalb des Kreises,
kleiner " " " " " innerhalb " " .

Erklärung 3. Ein geometrischer Ort ist eine Linie, welche sämtliche Punkte mit einer gegebenen Eigenschaft enthält.

Geometrischer Ort 1. Der Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Halbmesser r ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von M die Entfernung r besitzen.

Übungen.

Aufg. 1. Alle Punkte zu bestimmen, die von einem gegebenen Punkte A um r = 5 cm entfernt sind.

Auflösung. Mit Benutzung des Maßstabes wird der Zirkel so weit geöffnet, daß seine Spitzen die Entfernung 5 cm haben.

Aufg. 2. Einen Punkt zu bestimmen, der von den Endpunkten A und B der Strecke AB (= 8 cm) um 6 cm entfernt ist. Wieviel Punkte liefert die Ausführung?

Aufg. 3. Einen Punkt zu bestimmen, der von dem Endpunkte A einer Strecke AB (= 8 cm) um 5 cm und von dem zweiten Endpunkte B um 6 cm entfernt ist. Wieviel Lösungen besitzt die Aufgabe?

Aufg. 4. Welche Punkte der Geraden AB sind von einem gegebenen Punkte C außerhalb der Geraden um r cm entfernt? Wieviel Punkte liefert die Ausführung? Wann ist keine Lösung möglich?

Aufg. 5. Auf dem Kreise M, 5 cm einen Punkt zu bestimmen, der von einem Punkte A außerhalb des Kreises um 7 cm entfernt ist. Wann ist die Lösung nicht möglich?

Nr. 6. Kreismessung.

Erklärung 1. Zwei Punkte eines Kreises begrenzen einen Teil des Kreises, welcher Bogen genannt wird.

Zwei Bogen eines Kreises oder zweier Kreise mit demselben Halbmesser können aufeinander gelegt und ineinander verschoben werden. Es läßt sich daher durch einen Deckungsversuch entscheiden, ob der erste Bogen gleich dem zweiten oder größer, bez. kleiner als dieser ist.

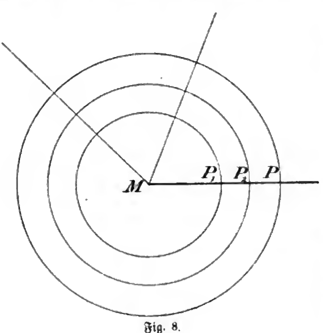


Fig. 8.

Zwei Bogen zweier Kreise mit verschiedenen Halbmessern können nicht zur Deckung gebracht werden.

Durch Deckung ergibt sich:

Jeder Durchmesser teilt den Kreis in zwei Halbkreise.

Werden zwei Kreise durch verschiedene Punkte P_1 und P_2 eines Strahles bei der Drehung um seinen Ausgangspunkt M beschrieben, und wird der erste in 360 gleiche Bogen zerlegt, so teilen die von M nach den Teilpunkten gezogenen Strahlen auch den zweiten Kreis in 360 gleiche Bogen.

Erklärung 2. Der 360te Teil eines Kreises wird Bogengrad (°) genannt.

Zusatz. Die Länge eines Bogengrades ändert sich mit dem Halbmesser.

Erklärung 3. Ein Bogen ist α^0 groß, wenn $\frac{1}{360}$ seines Kreises in ihm α-mal enthalten ist.

Zusatz. Die Bestimmung der Zahl α geschieht durch Benutzung des Gradmessers (des Maßkreises, Transporteurs) in der Weise, daß man die Mittelpunkte der beiden Kreise und den ersten Begrenzungsradius mit dem Radius des Gradmessers, der nach dem 0ten Teilstriche führt, zusammenfallen läßt. Der zweite Begrenzungsradius (oder seine Verlängerung) trifft dann den Gradmesser in dem Teilstrich α.

Nr. 7. Winkel und Winkelmessung.

Erklärung 1. Zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen bilden einen **Winkel** (∢). Die beiden Strahlen heißen Schenkel und ihr Ausgangspunkt heißt Scheitel des Winkels.

Die Strahlen MA und MB können durch Drehung um den Punkt M ineinander übergeführt werden. Daraus folgt:

Zusatz 1. Ein Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt.

Zur Bezeichnung des Winkels wählt man die Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets — oder man nimmt auf den Schenkeln zwei beliebige Punkte und setzt die Bezeichnung des Scheitels zwischen die beiden Punkte (AMB). Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann auch der Scheitelpunkt allein benutzt werden.

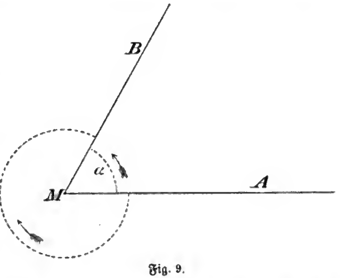


Fig. 9.

Zusatz 2. (S. Fig. 9.) Die Strahlen MA und MB begrenzen 2 Winkel. Der erste entsteht, wenn der Strahl MB durch eine Drehung von rechts nach links, und der zweite, wenn MB durch eine Drehung von links nach rechts aus der Lage MA in seine Lage MB übergeht. In zweifelhaften Fällen ist daher eine nähere Bezeichnung erforderlich.

Legt man einen Winkel β so auf einen Winkel α, daß die Scheitel und ein Schenkelpaar sich decken, so können drei Fälle eintreten:

1. Der zweite Schenkel von β fällt auf den zweiten Schenkel von α. Die Winkel heißen dann gleich oder gleichgroß.

2. Der zweite Schenkel von β liegt zwischen den Schenkeln von α; β heißt dann kleiner als α.

3. Der zweite Schenkel des Winkels β liegt außerhalb des Winkels α; β heißt dann größer als α.

Während der Strahl bei seiner Drehung den Winkel beschreibt, legt ein Punkt P des Strahles einen Kreisbogen zurück.

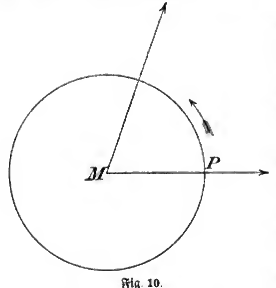


Fig. 10.

Ein Winkel kann daher durch einen um seinen Scheitel beschriebenen Kreisbogen gemessen werden. Wird der Winkel, der bei der Drehung mit einem Bogengrad zugleich entsteht, als Winkelgrad oder kurz als Grad bezeichnet, so folgt:

Erklärung 2. Als Einheit für die Winkelmessung dient der Grad (^{0}).

Zusatz 1. Ein Winkel ist n^0 groß, wenn der zu ihm gehörige Kreisbogen n Bogengrade beträgt.

Hiernach kann der Gradmesser auch zur Winkelmessung benutzt werden. Das Verfahren ist dasselbe wie bei der Ausmessung eines Bogens.

Anmerkung. Der Grad wird in 60 Minuten (′) und die Minute in 60 Sekunden (″) eingeteilt.

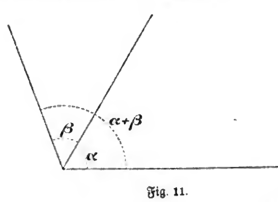


Fig. 11.

Zusatz 2. Winkel und Kreisbogen dienen als Maß für die Drehung des zweiten Schenkels (Radius) und geben den Richtungsunterschied der beiden Schenkel (Radien) an.

Erklärung 3. Legt man den Winkel β so an den Winkel α, daß dieser dadurch fortgesetzt wird, so sagt man, β sei an α angetragen oder zu α addiert, und bezeichnet den durch die Addition entstehenden Winkel als die Summe $\alpha + \beta$. (S. Fig. 11.)

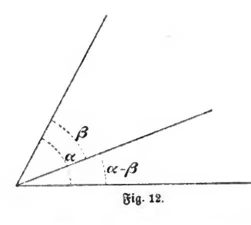


Fig. 12.

Legt man den Winkel β so auf den Winkel α, daß die Scheitel und ein Schenkelpaar sich decken, so sagt man, β sei von α abgetragen oder subtrahiert, und bezeichnet den nicht bedeckten Teil von α als die Differenz $\alpha - \beta$. (S. Fig. 12.)

Nr. 8. Einteilung der Winkel nach Lage und Größe.

Schneiden sich zwei Geraden, so entstehen 4 Winkel.

Erklärung 1. Zwei Winkel, welche am Schnittpunkte zweier Geraden nebeneinander liegen, heißen **Nebenwinkel** (Nw.).

Erklärung 2. Zwei Winkel, welche am Schnittpunkte zweier Geraden einander gegenüberliegen, heißen **Scheitelwinkel** (Schtw.).

Erklärung 3. Ein **gestreckter** Winkel ist ein Winkel, dessen Schenkel in entgegengesetzter Richtung eine gerade Linie bilden.

Folgerung. Alle gestreckten Winkel sind gleichgroß und gleich 180°.

Erklärung 4. Ein Winkel heißt konkav (hohl), wenn er kleiner, und konvex (erhaben), wenn er größer ist als ein gestreckter Winkel.

Erklärung 5. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder von ihnen **rechter Winkel** oder **Rechter** (R).

Folgerungen. Ein Rechter ist die Hälfte eines gestreckten Winkels. — Alle rechten Winkel sind gleichgroß und gleich 90° ($R = 90°$).

Zusatz. Der gemeinsame Schenkel zweier gleichen Nebenwinkel heißt **Lot** oder **Senkrechte** (⊥) auf (zu) der Geraden, welche von den nicht gemeinsamen Schenkeln gebildet wird.

(Anschauungs-)**Satz 1.** In einem Punkte einer Geraden kann nur ein Lot zu der Geraden errichtet werden.

Erklärung 6. Ein Winkel heißt spitz, wenn er kleiner ist als ein rechter, und stumpf, wenn er größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Kapitel 2.

Die Lehre von den Winkeln.

Nr. 9. Lehrsätze, Beweisformen und Beweismittel.

Werden bei der Herstellung einer Figur besondere Bedingungen erfüllt, so bezeichnet man diese als Voraussetzung (Vor.). Die Aussage, daß die Figur infolge der Voraussetzung gewisse Eigenschaften besitzt, bildet den Inhalt der Behauptung (Beh.). Die Verbindung zwischen Voraussetzung und Behauptung wird durch einen Lehrsatz ausgedrückt, dessen Richtigkeit durch einen Beweis (Bew.) festgestellt werden muß.

Kann die Richtigkeit eines Lehrsatzes durch Benutzung der Erklärungen oder der bereits bewiesenen Lehrsätze oder durch einfache Schlüsse aus der Voraussetzung abgeleitet werden, so wird der Beweis direkter Beweis genannt. Beweismittel sind also alle bereits bewiesenen Lehrsätze und die Schlußformen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die folgenden Schlußformen, die als Grundsätze (G) bezeichnet werden sollen.

G I. Sind zwei Größen einander gleich, so kann jede für die andere gesetzt werden.

Ist $a = b$
und $b + c = d$,

so ist auch $a + c = d$.

G II. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.

Ist $a = c$
und $b = c$,

so ist auch $a = b$.

G III. Gleiches zu Gleichem addiert oder von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Ist $a = c$
und $b = d$,
so ist auch $a + b = c + d$ und $a - b = c - d$.

G IV. Gleiches mit Gleichem multipliziert oder durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Ist $a = c$
und $b = d$,
so ist auch $a \cdot b = c \cdot d$ und $a : b = c : d$.

Läßt sich für die Richtigkeit eines Lehrsatzes ein direkter Beweis nicht geben, so sucht man die Beziehungen auf, die außer der Behauptung noch möglich sind, und zeigt, daß die Annahme einer jeden dieser noch möglichen Beziehungen zu einem Widerspruch gegen die Ausführung der Zeichnung oder gegen einen bereits bewiesenen Lehrsatz führt. (Indirekter Beweis.)

Nr. 10. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Lehrsatz 1. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 2 R ($\alpha + \beta = 2\,R$).

Addiert man β zu α, so erhält man einen gestreckten Winkel.

Folgerung. Jeder Winkel ist gleich der Differenz aus 2 R und einem seiner Nebenwinkel ($\alpha = 2\,R - \beta$ oder $= 2\,R - \delta$).

Lehrsatz 2. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beh. (S. Fig. 13.) Es ist $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Bew. Die Winkel α und γ besitzen beide den Nebenwinkel β. Daher ist nach der Folgerung zu Lehrs. 1

$\alpha = 2\,R - \beta$
und $\gamma = 2\,R - \beta$,
also $\alpha = \gamma$ (G II).

Entsprechend wird gezeigt, daß $\beta = \delta$ ist.

Fig. 13.

Übungen.

Satz 1. Ist einer von den 4 Winkeln am Schnittpunkte zweier Geraden ein rechter, so sind es auch die drei anderen.

Anleitung zum Bew. Die Lehrsätze über Nw. und Schtw. kommen zur Verwendung.

Satz 2. Die Halbierungslinie eines Winkels halbiert auch seinen Scheitelwinkel.

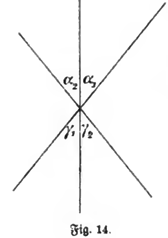


Fig. 14.

Vor. (S. Fig. 14.) Es sei $\alpha_1 = \alpha_2$.
Beh. Es ist $\gamma_1 = \gamma_2$.
Bew. Da $\alpha_1 = \gamma_1$ (Schtw.)
und $\alpha_1 = \alpha_2$ (Vor.),
so folgt: $\gamma_1 = \alpha_2$ (G I oder G II).
Da ferner $\gamma_2 = \alpha_2$ (Schtw.),
so ergibt sich: $\gamma_1 = \gamma_2$ (G II).

Satz 3. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht.

Vor. (S. Fig. 15.) Es sei $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

Beh. Es ist $EM \perp MD$.

Bew. EM steht senkrecht auf MD, wenn $\sphericalangle EMD = \sphericalangle EMF$ ist.

Da $\alpha_2 = \alpha_1$ (Vor.)
und $\beta_1 = \beta_2$ (Vor.) ist,
so folgt: $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2$ (G III).

Da ferner $\alpha_1 = \sphericalangle CMF$ (Schtw.) ist,
so ergibt sich: $\alpha_2 + \beta_1 = \sphericalangle CMF + \beta_2$ (G I),
d. h. $\sphericalangle EMD = \sphericalangle EMF$,
und somit ist $EM \perp MD$.

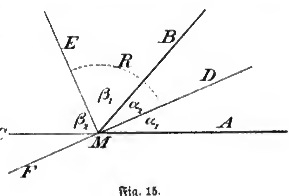


Fig. 15.

Nr. 11. Übungssätze über Winkel zweier Geradenpaare.

Satz 4. Sind zwei Winkel einander gleich,

a) so ist jeder von ihnen gleich dem Scheitelwinkel des anderen,

b) so sind auch ihre Scheitelwinkel einander gleich,

c) so ergänzt jeder von ihnen einen der Nebenwinkel des anderen zu zwei Rechten,

d) so sind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

Beweis zu d.

Vor. (S. Fig. 16.) Es sei $\alpha' = \alpha$.

Beh. Es ist $\beta' = \delta$.

Bew. Da $\beta' = 2R - \alpha'$ (Nw.)
und $\alpha' = \alpha$ (Vor.) ist,
so folgt $\beta' = 2R - \alpha$ (G I).

Da ferner $\delta = 2R - \alpha$ (Nw.) ist,
so ergibt sich: $\beta' = \delta$ (G II).

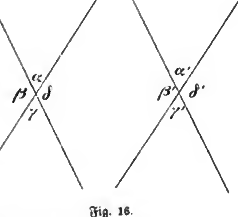


Fig. 16.

Satz 5. Ergänzen sich zwei Winkel zu zwei Rechten,

a) so ergänzt jeder von ihnen den Scheitelwinkel des anderen zu zwei Rechten,

b) so ergänzen sich auch ihre Scheitelwinkel zu zwei Rechten,

c) so ist jeder von ihnen gleich einem der Nebenwinkel des anderen,

d) so ergänzen sich auch ihre Nebenwinkel zu zwei Rechten.

Beweis zu b. (S. Fig. 17.)

Vor. Es sei $\alpha' + \alpha = 2R$.

Beh. Es ist $\gamma' + \gamma = 2R$.

Bew. Da $\gamma' = \alpha'$ (Schtw.)
und $\alpha' + \alpha = 2R$ (Vor.) ist,
so folgt: $\gamma' + \alpha = 2R$ (G I).

Da ferner $\gamma = \alpha$ (Schtw.) ist,
so ergibt sich: $\gamma' + \gamma = 2R$ (G I).

Satz 6. Ergänzen zwei Winkel einen dritten Winkel zu zwei oder zu einem Rechten, so sind sie gleichgroß.

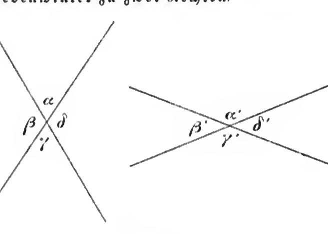


Fig. 17.

Nr. 12. Die Winkel des Dreiecks.

Erklärungen. a) Ein von drei Geraden vollständig begrenzter Teil der Ebene wird Dreieck (Δ) genannt und durch seine drei Ecken bezeichnet.

b) Die Strecken zwischen den Ecken heißen Seiten des Dreiecks.

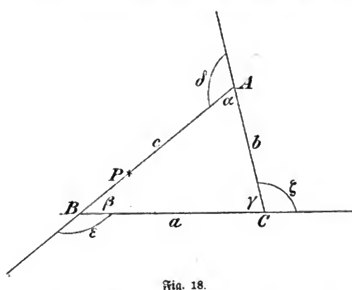


Fig. 18.

c) Die Winkel an den Ecken im Innern des Dreiecks heißen Dreieckswinkel (Winkel des Dreiecks).

d) Die Nebenwinkel der Dreieckswinkel heißen Außenwinkel.

e) Zwei Seiten schließen einen Winkel des Dreiecks ein, wenn sie seine Schenkel sind.

f) Eine Seite liegt einem Winkel gegenüber, wenn sie nicht zu den Schenkeln des Winkels gehört.

g) Ein Außenwinkel liegt den beiden Dreieckswinkeln gegenüber, die mit ihm nicht an einer Ecke liegen.

Zusatz zu d. An jeder Ecke liegen zwei Außenwinkel, die gleichgroß sind. Man kann daher die sechs Außenwinkel in zwei gleiche Gruppen einteilen, indem man jedesmal drei Winkel zusammenstellt, von denen nicht zwei an derselben Seite liegen. Unter der Summe der Außenwinkel versteht man die Summe der drei Winkel einer dieser Gruppen.

Bewegt sich ein Mann auf dem Umfang eines Dreiecks ABC von dem Punkte P der Seite AB aus (s. Fig. 18) zuerst nach B, von hier nach C, von C nach A und dann nach P zurück, so führt er eine ganze Umdrehung (4 R) aus. Auf dem Wege beschreibt er

in B die Drehung, welche dem Außenwinkel bei B entspricht,
in C " " " " " C "
und in A " " " " " A "

während er auf den Seiten selbst keine Drehung vornimmt. Hieraus ergibt sich:

Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 4 R.

Da jeder Außenwinkel sich mit dem zugehörigen (Innen-) Winkel des Dreiecks zu 2 R ergänzt (Nw.), so ist die Summe aus den Außen- und Innenwinkeln eines Dreiecks gleich 6 R. Da aber die Summe der Außenwinkel 4 R beträgt, so folgt:

Lehrsatz 3. Satz von der Winkelsumme im Dreieck. Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt stets 2 R ($\alpha + \beta + \gamma = 2\,\mathbf{R} = 180^\circ$).

Folgerung 1. Durch zwei Winkel α und β eines Dreiecks ist der dritte Winkel bestimmt ($\gamma = 180^0 - [\alpha + \beta]$).

Folgerung 2. Ist in einem Dreieck ein Winkel ein rechter, so sind die beiden anderen spitz und ihre Summe beträgt 90^0.

Erklärung. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt recht-winklig.

Folgerung 3. Ist in einem Dreieck ein Winkel ein stumpfer, so sind die beiden anderen spitz und ihre Summe ist kleiner als 90^0.

Erklärung. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpf-winklig.

Folgerung 4. Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Winkel oder deren Summe überein, so stimmen sie auch in der Größe der dritten Winkel überein.

Nach Lehrs. 3 ist $\alpha + \beta + \gamma = 2\,\mathrm{R}$.
Da aber auch $\delta + \alpha = 2\,\mathrm{R}$ ist (Nw.),
so folgt: $\delta = \beta + \gamma$ (G III u. G IV).

Ganz entsprechend wird gezeigt, daß auch $\varepsilon = \alpha + \gamma$ und $\zeta = \alpha + \beta$ ist, d. h.:

Lehrsatz 4. Außenwinkelsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden Dreiecks-winkel.

Folgerung 1. Ein Dreieckswinkel ist gleich der Differenz aus einem Außenwinkel und dem Dreieckswinkel, der mit ihm zugleich diesem Außen-winkel gegenüberliegt.

Folgerung 2. Jeder Außenwinkel ist größer als einer der ihm gegen-überliegenden Dreieckswinkel.

Folgerung 3. Da ein Außenwinkel stets kleiner als 2 R ist, so kann ein Dreieck weder zwei rechte noch zwei stumpfe, noch zugleich einen rechten und einen stumpfen Winkel besitzen.

Folgerung 4. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann nur ein Lot auf die Gerade gefällt werden.

Merke: **Um zu beweisen, daß ein Winkel α größer ist als ein zweiter Winkel β, kann man zeigen, daß α oder ein ihm gleicher Winkel Außen-winkel eines Dreiecks ist, in welchem ihm β gegenüberliegt.**

Übungen.

Aufg. 1. Es sei $\alpha = 47^0\ 25'\ 16''$ und $\beta = 84^0\ 13'\ 28''$. Wie groß sind δ, ε, ζ und γ?

Aufg. 2. Es sei $\alpha = 72^0\ 29',4$ und $\varepsilon = 118^0\ 4',2$. Wie groß sind die übrigen Winkel?

Aufg. 3. Es sei $\delta = 104^0\ 24'\ 56''$ und $\varepsilon = 148^0\ 19'\ 12''$. Wie groß sind die Drei-eckswinkel?

Aufg. 4. In einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln β und γ sei

1. $\beta = 49^\circ\ 17',2$.
2. $\alpha = 76^\circ\ 37',5$.

Wie groß sind die anderen Dreieckswinkel?

Aufg. 5. Zu beweisen, daß in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln die Halbierungslinie des dritten Winkels auf der gegenüberliegenden Seite senkrecht steht.

Aufg. 6. Zu beweisen, daß in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln das Lot vom Scheitel des dritten Winkels auf die gegenüberliegende Seite den dritten Winkel halbiert.

Aufg. 7. Zu beweisen, daß der Winkel der Geraden, welche einen Punkt im Innern des Dreiecks mit zwei Ecken verbinden, größer ist als der Winkel an der dritten Ecke.

Nr. 13. Winkel des Vielecks.

Erklärung. a) Ein von n Geraden vollständig begrenzter Teil der Ebene heißt n-Eck (Vieleck).

b) Die Erklärungen über Seiten, Winkel und Außenwinkel stimmen mit den entsprechenden Erklärungen beim Dreieck überein.

c) Die Verbindungslinie zweier Ecken, die nicht auf einer Seite liegen, heißt **Diagonale** des n-Ecks.

Zusatz. Von jeder Ecke eines n-Ecks aus sind n−3 Diagonalen möglich.

Folgerung. Die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$. Weshalb muß durch 2 dividiert werden?

Lehrsatz 5. Die Summe der Winkel eines n-Ecks beträgt (2n − 4) R.

Bew.: Verbindet man einen Punkt im Innern des n-Ecks mit den Ecken, so entstehen n Dreiecke, welche die Winkel des Vielecks und die Winkel um den Punkt P enthalten. Da die letzteren 4 R betragen, so ist die Summe der Winkel des n-Ecks $2n\,R - 4R$, d. h. $= (2n - 4)\,R$.

Folgerung. Die Summe der Außenwinkel eines Vielecks ist unabhängig von der Seitenzahl und beträgt stets 4 R.

Kapitel 3.

Die Kongruenz der Dreiecke.

Nr. 14. Die Ableitung der Kongruenzsätze. Beweis der beiden ersten Kongruenzsätze.

Erklärungen. a) Zwei Dreiecke heißen kongruent ($\cong$), wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß ihre Seiten und Ecken zusammenfallen.

b) Entsprechend heißen zwei Stücke zweier kongruenten Dreiecke, welche bei der Deckung aufeinanderfallen.

Folgerung 1. In kongruenten Dreiecken sind die entsprechenden Seiten und Winkel einander gleich.

Folgerung 2. In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Merke: **Um die Gleichheit zweier Seiten** (Winkel) **zu beweisen, kann man zeigen, daß sie in kongruenten Dreiecken gleichen Winkeln** (Seiten) **gegenüberliegen.**

Aufg. Ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen Dreieck ABC kongruent ist.

Auflösung. Da zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in allen Winkeln und Seiten übereinstimmen, so sind bei der Herstellung des gesuchten Dreiecks DEF folgende 5 Bedingungen zu erfüllen:

1. Es muß ∢ D = ∢ A sein, } mit Erfüllung dieser Bedingungen
2. „ „ ∢ E = ∢ B „ } ist auch ∢ F = ∢ C,
3. „ „ Seite DE = Seite AB sein,
4. „ „ „ DF = „ AC „ ,
5. „ „ „ EF = „ BC „ .

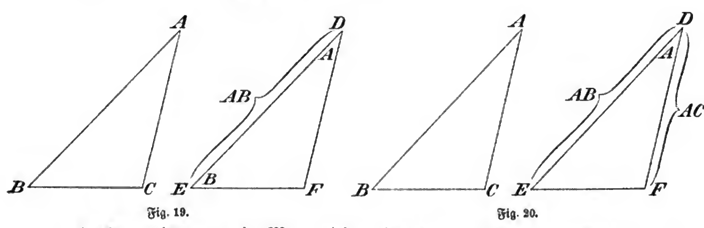


Fig. 19. Fig. 20.

1. Weg. (S. Fig. 19.) Man zeichnet (mit Benutzung des Winkelmessers) ∢ D = ∢ A, Seite DE = Seite AB und legt in E an ED den Winkel B an. Da die nicht gemeinsamen Schenkel der Winkel D und E sich in F schneiden, so ist das Dreieck DEF vollständig bestimmt.

2. Weg. (S. Fig. 20.) Man zeichnet (mit Benutzung des Winkelmessers) ∢ D = ∢ A, Seite DE = Seite AB und Seite DF = Seite AC. Da zwischen E und F nur eine Gerade gezogen werden kann, so ist das Dreieck DEF vollständig bestimmt.

3. Weg. (S. Fig. 21.) Man zeichnet ∢ D = ∢ A, Seite DE = Seite AB und schlägt um E mit BC einen Kreis. Da der Kreis den zweiten Schenkel des Winkels D in zwei Punkten schneiden kann, so sind zwei Dreiecke möglich. Von diesen kann nur dasjenige als Lösung gelten, dessen Winkel F mit C zugleich spitz oder stumpf ist.

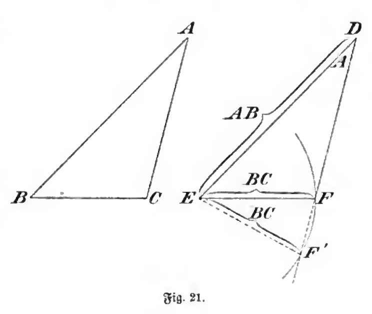


Fig. 21.

4. Weg. (S. Fig. 22.) Man zeichnet DE = AB, schlägt Kreise um D mit AC und um E mit BC und verbindet dann einen der Schnittpunkte der beiden Kreise mit D und E. Beide Dreiecke können als Lösung gelten.

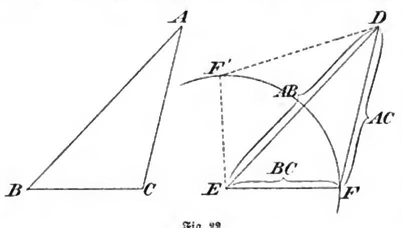


Fig. 22.

Jede andere Ausführung der Aufgabe führt durch Vertauschung der Ecken auf eine dieser 4 Lösungen zurück.

Auf jedem der 4 Wege konnten zwar nur 3 von den 5 Bedingungen durch die Herstellung der Figur erfüllt werden, allein die Anschauung lehrt jedesmal, daß auch die bei der Ausführung nicht berücksichtigten Bedingungen erfüllt sind. Den 4 Wegen entsprechen daher die 4 **Kongruenzsätze:**

Lehrsatz 6. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent. (Kongruenzsatz WSW.)

Zusatz. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

Lehrsatz 7. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent. (Kongruenzsatz SWS.)

Lehrsatz 8. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren von diesen gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent. (Kongruenzsatz SSW.)

Lehrsatz 9. Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent. (Kongruenzsatz SSS.)

Beweis des Lehrsatzes 6 durch Deckung. (S. Fig. 19.)

Vor. Es sei 1. DE = AB, 2. ∢ D = ∢ A, 3. ∢ E = ∢ B.
Beh. Es ist △ DEF ≅ △ ABC.

Bew. Man legt das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die Seite DE auf AB und die Ecke D auf A fällt. Da DE = AB ist,

1. so fällt auch die Ecke E auf B.

Da ∢ D auf ∢ A liegt und gleich ∢ A ist,

2. so fällt die Seite DF auf AC.

Da ferner ∢ E auf ∢ B liegt und gleich ∢ B ist,

3. so fällt die Seite EF auf BC.

Demnach fallen die drei entsprechenden Seiten und damit auch die Ecken aufeinander. Das gleiche tritt ein, wenn △ ABC auf DEF gelegt wird, d. h. die beiden Dreiecke sind kongruent.

Beweis des Lehrsatzes 7 durch Deckung. (S. Fig. 20.)

Vor. Es sei 1. DE = AB, 2. ∢ D = ∢ A, 3. DF = AC.

Beh. Es ist △ DEF ≅ △ ABC.

Bew. Man legt das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die Seite DE auf AB und die Ecke D auf A fällt. Da DE = AB ist,

1. so fällt auch die Ecke E auf B.

Da ∢ D = ∢ A ist und auf ∢ A liegt,

2. so fällt die Seite DF auf AC.

Da DF = AC ist,

3. so fällt nun auch die Ecke F auf C.

Demnach fallen die drei entsprechenden Ecken und damit auch die Seiten aufeinander. Das gleiche tritt ein, wenn das Dreieck ABC auf DEF gelegt wird, d. h. die beiden Dreiecke sind kongruent.

Anmerkung. Die beiden Lehrsätze 8 und 9, zu denen der 3. und 4. Weg bei der Zeichnung führen, können nicht durch Deckung der Dreiecke bewiesen werden. Ihr Beweis folgt in Nr. 16.

Nr. 15. Das gleichschenklige Dreieck.

Erklärungen. Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig. Die beiden gleichen Seiten werden als Schenkel und die dritte Seite wird als Grundlinie bezeichnet. Die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heißt Spitze. — Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleichgroß sind, heißt gleichseitig.

Lehrsatz 10. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.)

Vor. Es sei AC = AB.

Beh. Es ist ∢ B = ∢ C.

Bew. Wird der Winkel BAC durch die Gerade AD halbiert, so ist

∢ BAD = ∢ CAD,

AB = AC

und AD = AD,

also △ BAD ≅ △ CAD (SWS),

und somit ∢ B = ∢ C.

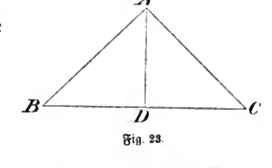


Fig. 23.

Folgerung 1. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Winkel an der Grundlinie.

Folgerung 2. Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel gleich 60°.

Lehrsatz 11. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.

Vor. Es sei ∢ C = ∢ B.

Beh. Es ist AB = AC.

Bew. Halbiert AD den Winkel BAC, so ist

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD,$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle C \text{ (Vor.)}$$
und
$$AD = AD,$$
also
$$\triangle BAD \cong CAD \text{ (WSW)},$$
und somit
$$AB = AC.$$

Folgerungen für das gleichschenklige Dreieck.

1. Das von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Lot halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

2. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks steht senkrecht auf der Grundlinie und halbiert die Grundlinie.

3. Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf der Grundlinie senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

4. Das in der Mitte der Grundlinie auf dieser errichtete Lot geht durch die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks und halbiert den Winkel an der Spitze.

Lehrsatz 12. In einem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

Vor. (S. Fig. 24.) Es sei $AB > AC$.

Beh. Es ist $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$.

Bew. Zeichnet man $AD = AB$ und verbindet D mit B, so ist das Dreieck ABD gleichschenklig und der Winkel ACB Außenwinkel des Dreiecks BCD. Demnach ist

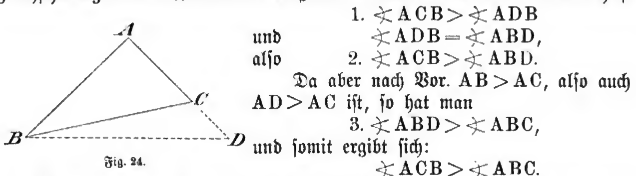


Fig. 24.

1. $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADB$

und $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD,$

also 2. $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABD.$

Da aber nach Vor. $AB > AC$, also auch $AD > AC$ ist, so hat man

3. $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ABC,$

und somit ergibt sich:

$$\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC.$$

Lehrsatz 13. In einem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

Vor (Fig. 24.) Es sei $\sphericalangle C > \sphericalangle B$.

Beh. Es ist $AB > AC$.

Bew. Beweis indirekt.

Wäre $AB = AC$, so müßte $\sphericalangle C = \sphericalangle B$ sein (Lehrs. 10).
" $AB < AC$, " " $\sphericalangle C < \sphericalangle B$ " (Lehrs. 12).

Beides widerspricht der Vor. Eine weitere Möglichkeit ist nicht vorhanden, und daher muß $AB > AC$ sein.

Merke: **Um zu beweisen, daß eine Seite größer ist als eine zweite, kann man beide in ein Dreieck bringen und zeigen, daß die erste dem größeren Winkel gegenüberliegt.**

Folgerungen. 1. Der kleineren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt stets ein spitzer Winkel gegenüber.

2. Die Winkel an der größten Seite eines Dreiecks sind beide spitz.

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (die **Hypotenuse**) größer als jede der beiden anderen Seiten (die **Katheten**).

4. Das von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Lot ist kleiner als jede andere von dem Punkte nach der Geraden gezogene Verbindungslinie.

5. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite.

Anl. z. Bew. Die Herstellung der Summe liefert ein gleichschenkliges Dreieck und führt auf die erforderliche Ungleichheit der gegenüberliegenden Winkel.

6. Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner als die dritte Seite.

Anl. z. Bew. Die Herstellung der Differenz führt auf ein Dreieck, in welchem die dritte Seite einem stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Stehen über der Grundlinie BC die beiden gleichschenkligen Dreiecke ABC und DBC, so ist (s. Fig. 25)

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB,$$
$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB$$

und somit

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD \quad (\text{G III}).$$

Verbindet man daher die Spitzen A und D miteinander, so entstehen zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Daraus folgt:

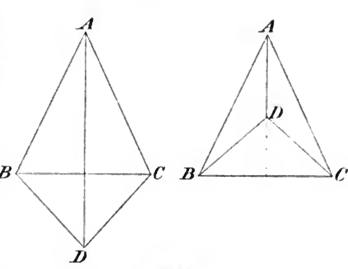


Fig. 25.

Lehrsatz 14. Die Verbindungslinie der Spitzen zweier über derselben Grundlinie stehenden gleichschenkligen Dreiecke

a) bildet mit den Schenkeln zwei kongruente Dreiecke,

b) halbiert die beiden Winkel an den Spitzen,

c) steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Grundlinie und

d) halbiert die gemeinschaftliche Grundlinie.

Hiernach können ohne Benutzung des Maßstabes und Gradmessers, also lediglich mit Zirkel und Lineal die folgenden Grundaufgaben ausgeführt werden.

Aufg. 1. Eine Strecke AB zu halbieren.

Ausführung. Man schlägt um A und B Kreise mit demselben Halbmesser und verbindet deren Schnittpunkte miteinander.

Aufg. 2. Einen Winkel A zu halbieren.

Ausführung. Man schneidet die Schenkel des Winkels durch einen Kreis um A, schlägt um die Schnittpunkte B und C Kreise mit demselben Halbmesser und verbindet einen ihrer Schnittpunkte mit dem Scheitel A.

Aufg. 3. In einem Punkte P einer Geraden G das Lot auf der Geraden zu errichten.

Ausführung. Man schlägt um P einen Kreis, zeichnet um die Punkte A und B, in denen dieser Kreis die Gerade G schneidet, mit gleichen Halbmessern Kreise und verbindet einen ihrer Schnittpunkte mit P.

Aufg. 4. Von einem Punkte P außerhalb einer Geraden G das Lot auf die Gerade zu fällen.

Ausführung. Man schlägt um P einen Kreis, zeichnet um die Punkte A und B, in denen dieser Kreis die Gerade G schneidet, mit gleichen Halbmessern Kreise und verbindet einen ihrer Schnittpunkte mit P.

Übungen.

Aufg. 1. Einen rechten Winkel zu zeichnen. Aufg. 2. Einen Winkel von 45° zu zeichnen.
Aufg. 3. Einen Winkel von $22\frac{1}{2}$° zu zeichnen. Aufg. 4. " " " $67\frac{1}{2}$° " "
Aufg. 5. " " " 60° " " Aufg. 6. " " " 30° " "
Aufg. 7. " " " 15° " " Aufg. 8. " " " 105° " "
Aufg. 9. " " " $52\frac{1}{2}$° " " usw.

Aufg. 10. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie a (5 cm) und dem Winkel 75° 1. an der Grundlinie, 2. an der Spitze zu zeichnen.

Aufg. 11. Ein rechtwinkliges Dreieck (Katheten: a und b, Hypotenuse: c) zu zeichnen aus

1. a = 6 cm u. b = 5 cm. 2. a = 6 cm u. c = 10 cm. 3. b = 5 cm u. c = 13 cm.
4. a = 7 cm u. $\beta = 30°$. 5. a = 8 cm u. $\alpha = 67\frac{1}{2}°$. 6. b = 5 cm u. $\beta = 82\frac{1}{2}°$.
7. c = 12 cm u. $\alpha = 22\frac{1}{2}°$. 8. c = 10 cm u. $\alpha = 37\frac{1}{2}°$. 9. c = 8 cm u. $\alpha = 52\frac{1}{2}°$.

Aufg. 12. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. a = 8 cm, $\gamma = 52\frac{1}{2}°$ u. b = 9 cm. 2. a = 10 cm, $\beta = 105°$ u. b = 12 cm.
3. a = 9 cm, $\beta = 75°$ u. $\gamma = 52\frac{1}{2}°$. 4. a = 7 cm, $\alpha = 67\frac{1}{2}°$ u. $\beta = 75°$.
5. a = 12 cm, $\alpha = 105°$ u. $\gamma = 37\frac{1}{2}°$. 6. $\alpha = 75°$, w_α*) = 5 cm u. b = 7 cm.
7. $\beta = 67\frac{1}{2}°$, w_β = 7 cm u. a = 9 cm. 8. $\gamma = 105°$, w_γ = 5 cm u. a = 8 cm.

Nr. 16. Beweis der Kongruenzsätze III. und IV.

Beweis des Lehrsatzes 8: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren von diesen gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

*) D. h. die Halbierungslinie des Winkels α.

Vor. (S. Fig. 26.) Es sei DE = AB, DF = AC, $\sphericalangle$ DEF = $\sphericalangle$ ABC und DF > DE.

Beh. Es ist $\triangle$ DEF $\cong$ $\triangle$ ABC.

Bew. Man legt das Dreieck DEF so an das Dreieck ABC, daß D auf A und F auf C fällt, und verbindet B mit E. Da die Winkel ACB und DEF spitz sind (Lehrs. 13, Folg. 1) und daher der Winkel BCE kleiner als 2 R ist, so kann BE nur die Seite AC oder ihre Verlängerung über A hinaus schneiden. In beiden Fällen ist

AE = AB (Vor.),

also $\sphericalangle$ AEB = $\sphericalangle$ ABE,

und da

$\sphericalangle$ AEC = $\sphericalangle$ ABC (Vor.)

ist, so folgt nach G III durch Subtraktion, bzw. Addition

$\sphericalangle$ CEB = $\sphericalangle$ CBE

und somit: CE = CB.

Es stehen also über BE zwei gleichschenklige Dreiecke, und demnach ist nach Lehrs. 14:

$\triangle$ DEF $\cong$ $\triangle$ ABC.

Am einfachsten gestaltet sich der Beweis, wenn BE durch A geht. Welcher Lehrsatz ist in diesem Falle anzuwenden?

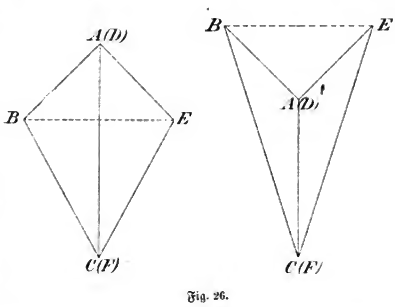


Fig. 26.

Beweis des Lehrsatzes 9: Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

Vor. Es sei DE = AB, DF = AC, EF = BC.

Beh. Es ist $\triangle$ DEF $\cong$ $\triangle$ ABC.

Bew. (S. Fig. 26.) Legt man das Dreieck DEF so an das Dreieck ABC, daß D auf A, DF auf AC, also auch F auf C fällt, und verbindet E mit B, so erhält man über BE zwei gleichschenklige Dreiecke, ABE und CBE. Nach Lehrs. 14 ist daher $\triangle$ DEF $\cong$ $\triangle$ ABC.

Auf den Lehrs. 9 stützt sich die Ausführung der

Grundaufgabe. An eine Gerade G in einem ihrer Punkte P einen gegebenen Winkel α anzulegen.

Man zeichnet um den Scheitel A des Winkels α einen Kreis (s. Fig. 27), der die Schenkel in zwei Punkten schneidet, die B und C heißen mögen, schlägt um P den Kreis mit demselben Halbmesser und um den auf G liegenden Schnittpunkt Q den Kreis mit dem Halbmesser BC. Verbindet man dann P mit einem der Schnittpunkte R des letzten Kreises und des um P beschriebenen Kreises, so ist die Aufgabe gelöst. Die Ausführung liefert 4 Lagen für den Winkel.

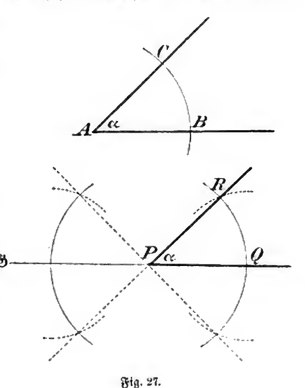


Fig. 27.

Nr. 17. Anwendungen der Kongruenzsätze.

a) Erklärung 1. Das auf einer Strecke in ihrer Mitte errichtete Lot heißt Mittellot.

Lehrsatz 15. Jeder Punkt des Mittellotes einer Strecke ist von den Endpunkten der Strecke gleichweit entfernt.

Zum Beweise ist SWS. zu benutzen.

Lehrsatz 16. Ist ein Punkt von den Endpunkten einer Strecke gleichweit entfernt, so ist seine Verbindungslinie mit der Mitte der Strecke das Mittellot der Strecke.

Zum Beweise ist SSS. zu verwenden.

Die Verbindung der Sätze 15 und 16 liefert:

Geometrischer Ort 2. Das Mittellot einer Strecke ist der Ort für alle Punkte, die von den Endpunkten der Strecke gleichweit entfernt sind.

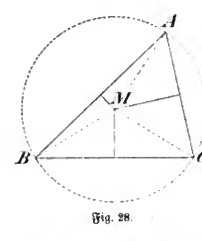


Fig. 28.

(S. Fig. 28.) Ist M der Schnittpunkt der beiden zu den Dreiecksseiten AB und AC gehörigen Mittellote, so ist nach Lehrs. 15 MB = MA und MC = MA, also auch MB = MC. Nach Lehrs. 16 liegt daher M auch auf dem Mittellot der Seite BC. Es besteht also der Satz:

Lehrsatz 17. Die drei Mittellote eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte, und dieser ist von den Ecken gleichweit entfernt.

Folgerung. Ein Kreis ist durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, vollständig bestimmt.

b) Erklärung 2. Das Lot von einem Punkte auf eine Gerade wird Abstand oder Entfernung des Punktes von der Geraden genannt.

Lehrsatz 18. Jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels ist von dessen Schenkeln gleichweit entfernt.

Anl. z. Bew. In den Worten „Halbierungslinie" und „entfernt" sind zwei Voraussetzungen über die Winkel der entstehenden Dreiecke enthalten.

Lehrsatz 19. Ist ein Punkt von den Schenkeln eines Winkels gleichweit entfernt, so liegt er auf dessen Halbierungslinie.

Anl. z. Bew. Die Verbindung des Punktes mit dem Scheitel liefert zwei rechtw. Dreiecke, die nach SSW. kongruent sind.

Die Vereinigung der Lehrsätze 18 und 19 liefert:

Geometrischer Ort 3. Die Halbierungslinie eines Winkels ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von seinen Schenkeln gleichweit entfernt sind.

(S. Fig. 29.) Schneiden sich die Halbierungslinien der Winkel A und B des Dreiecks ABC in O und sind OD, OE und OF die Abstände des Punktes O von den Dreiecksseiten, so ist nach Lehrs. 18 OD = OE und

OD = OF, also auch OE = OF. Nach Lehrs. 19 liegt daher O auch auf der Halbierungslinie des Winkels C, d. h

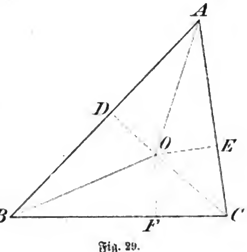


Fig. 29.

Lehrsatz 20. Die drei Winkelhalbierungslinien eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte, und dieser ist von den Seiten gleichweit entfernt.

Zusatz. In gleicher Weise ergibt sich, daß die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und der beiden ihm gegenüberliegenden Außenwinkel sich in einem Punkte schneiden, der von den Seiten bzw. ihren Verlängerungen gleichweit entfernt ist.

Übungen.

Erklärung. Das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite eines Dreiecks wird als die zu der Seite gehörige **Höhe** bezeichnet.

Aufg. 1. Zu beweisen, daß gleichschenklige Dreiecke kongruent sind, wenn sie übereinstimmen

a) in der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze,
b) " " " " der Höhe zu einem Schenkel,
c) " " " " " " " der Grundlinie,
d) in einem Schenkel und der zu ihm gehörigen Höhe,
e) " " " " " Höhe zu der Grundlinie.

Aufg. 2. Zu beweisen, daß gleichseitige Dreiecke kongruent sind, wenn sie in einer Höhe übereinstimmen.

Aufg. 3. Ein Dreieck aus a, β und γ ohne Benutzung des Gradmessers zu zeichnen.

Aufg. 4. Ein Dreieck aus a, b und α zu zeichnen, wenn $a > b$ ist.

Aufg. 5. Ein Dreieck aus a, b und α zu zeichnen, wenn $a < b$ ist. Zwei Lösungen.

Aufg. 6. Ein gleichschenkliges Dreieck aus der Grundlinie und der zu ihr gehörigen Höhe zu zeichnen.

Aufg. 7. Ein gleichschenkliges Dreieck aus der Grundlinie und der zu einem Schenkel gehörigen Höhe zu zeichnen.

Aufg. 8. (Der Winkel zweier Geraden p und q, sei mit $\sphericalangle$ p, q, und die Verbindungslinie der Ecke A mit der Mitte der Seite BC, die Mittellinie von BC, sei mit m_a bezeichnet.) Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $a = 10$ cm, $b = 7$ cm u. $m_a = 6$ cm.
2. $a = 8$ cm, $b = 4$ cm u. $m_a = 5$ cm.
3. $a = 7$ cm, $b = 5$ cm u. $\sphericalangle a, m_a = 45^0$.
4. $a = 12$ cm, $c = 7$ cm u. $\sphericalangle a, m_a = 67\frac{1}{2}^0$.
5. $b = 8$ cm, $m_a = 6$ cm u. $\sphericalangle b, m_a = 40^0$.
6. $a = 9$ cm, $m_a = 5$ cm u. $\sphericalangle c, m_a = 52\frac{1}{2}^0$.
7. $b = 6$ cm, $\gamma = 75^0$ u. $\sphericalangle a, m_a = 45^0$.
8. $a = 8$ cm, $m_a = 5$ cm u. $\beta = 67\frac{1}{2}^0$.
9. $a = 10$ cm, $\beta = 52\frac{1}{2}^0$ u. $\sphericalangle a, m_a = 105^0$.
10. $a = 12$ cm, $m_a = 7$ cm u. $\sphericalangle b, m_a = 22\frac{1}{2}^0$.
11. $b = 9$ cm, $m_a = 9$ cm u. $\sphericalangle a, m_a = 67\frac{1}{2}^0$.
12. $c = 7$ cm, $m_a = 5$ cm u. $\sphericalangle a, m_a = 122\frac{1}{2}^0$.

Aufg. 9. (Die Winkelhalbierende w_α teilt die Seite a in die Abschnitte u (an C stoßender Abschnitt) und v_a [an B stoßender Abschnitt].) Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $w_\alpha = 7$ cm, $b = 5$ cm u. $u_a = 4$ cm.
2. $w_\alpha = 6$ cm, $c = 7$ cm u. $v_a = 4$ cm.
3. $w_a = 5$ cm, $u_a = 3$ cm u. $\gamma = 75^0$.
4. $w_\alpha = 9$ cm, $v_a = 5$ cm u. $\beta = 105^0$.
5. $w_a = 10$ cm, $b = 8$ cm u. $\alpha = 67\frac{1}{2}^0$.
6. w_α 12= cm, $u_a = 13$ cm u. $\alpha = 112\frac{1}{2}^0$.

Aufg. 10. (Die Höhe h_a zerlegt die Seite a in zwei Abschnitte p und q, von denen der erste von C und der zweite von B aus gerechnet wird.) Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $b = 9$ cm, $p = 7$ cm u. $c = 11$ cm. 2. $b = 8$ cm, $c = 7$ cm u. $q = 13$ cm.
3. $b = 8$ cm, $c = 9$ cm u. $h_a = 7$ cm. 4. $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm u. $\alpha = 75^\circ$.
5. $p = 3$ cm, $q = 4$ cm u. $\beta = 52\frac{1}{2}^\circ$. 6. $a = 11$ cm, $p = 5$ cm u. $\gamma = 52\frac{1}{2}^\circ$.
7. $a = 5$ cm, $p = 7$ cm u. $\gamma = 112\frac{1}{2}^\circ$. 8. $a = 8$ cm, $q = 3$ cm u. $\beta = 105^\circ$.
9. $p = 4$ cm, $\beta = 45^\circ$ u. $\gamma = 75^\circ$. 10. $p = 7$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}^\circ$ u. $\beta = 67\frac{1}{2}^\circ$.
11. $p = 5$ cm, $h_a = 7$ cm u. $m_a = 8$ cm. 12. $p = 3$ cm, $\gamma = 75^\circ$ u. $w_\alpha = 13$ cm.

Aufg. 11. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $a = 7$ cm, $b + c = 11$ cm u. $\alpha = 75^\circ$. 2. $a = 16$ cm, $b + c = 19$ cm u. $\alpha = 105^\circ$.
3. $a = 5$ cm, $b + c = 11$ cm u. $\beta = 105^\circ$. 4. $a = 6$ cm, $b + c = 10$ cm u. $\gamma = 75^\circ$.
5. $b + c = 12$ cm, $\alpha = 45^\circ$ u. $\beta = 67\frac{1}{2}^\circ$. 6. $b + c = 15$ cm, $\beta = 52\frac{1}{2}^\circ$ u. $\gamma = 75^\circ$.
7. $a = 7$ cm, $b + c = 11$ cm u. $h_b = 5$ cm. 8. $a = 8$ cm, $b + c = 13$ cm u. $h_c = 6{,}5$ cm.
9. $b + c = 10$ cm, $h_b = 4$ cm u. $\alpha = 105^\circ$. 10. $b + c = 12$ cm, $h_c = 5$ cm u. $\alpha = 75^\circ$.

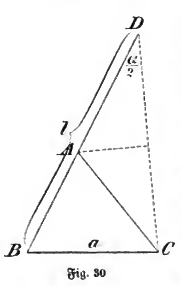


Fig. 30

Aufl. der Aufg. 1: a, $b + c = l$ und α. Wird in einem beliebigen Dreieck ABC die der Größe $b + c$ entsprechende Summe $BA + AC$ gebildet und der Endpunkt D der Summe mit C verbunden, so ist das Dreieck ADC gleichschenklig und demnach $\sphericalangle D = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$ (Folg. 1 zu Lehrs. 10). Von dem Dreieck, das dem Dreieck DBC entspricht, kennt man also zwei Seiten und einen der nicht eingeschlossenen Winkel. Daraus folgt die:

Ausführung (s. Fig. 30). Man mißt auf einer Geraden die Strecke BD von der Länge l ab, legt in D den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ an, schlägt um B mit a den Kreis und verbindet B mit einem der Punkte C, in denen der Kreis den zweiten Schenkel des angelegten Winkels schneidet. Das Mittellot der Strecke CD trifft dann DB in der dritten Ecke A des gesuchten Dreiecks.

Aufg. 12. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $a = 7$ cm, $b - c = 3$ cm u. $\alpha = 52\frac{1}{2}^\circ$. 2. $a = 6$ cm, $b - c = 4$ cm u. $\alpha = 105^\circ$.
3. $a = 8$ cm, $b - c = 3$ cm u. $\gamma = 67\frac{1}{2}^\circ$. 4. $a = 9$ cm, $b - c = 5$ cm u. $\beta = 105^\circ$.
5. $b - c = 5$ cm, $\alpha = 67\frac{1}{2}^\circ$ u. $\beta = 75^\circ$. 6. $b - c = 4$ cm, $\beta = 75^\circ$ u. $\gamma = 52\frac{1}{2}^\circ$.
7. $a = 10$ cm, $b - c = 3$ cm u. $h_b = 7$ cm. 8. $a = 9$ cm, $b - c = 4$ cm u. h_c 7 cm.
9. $b - c = 3{,}5$ cm, $h_b = 6$ cm u. $\alpha = 45^\circ$. 10. $b - c = 4{,}5$ cm, $h_b = 8$ cm u. $\alpha = 75^\circ$.

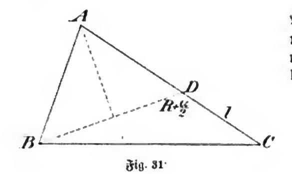


Fig. 31

Aufl. der Aufg. 1: a, $b - c = d$ und α. Verfährt man ähnlich wie bei Aufg. 11, so erkennt man, daß das Dreieck BDC gezeichnet werden kann, und daß die Ecke A durch das Mittellot von BD bestimmt wird. (S. Fig. 31.)

Aufg. 13. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $a + b + c = 15$ cm, $\beta = 45^\circ$ u. $\gamma = 67\frac{1}{2}^\circ$.
2. $a + b + c = 13$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$ u. $\beta = 75^\circ$.
3. $a + b + c = 12$ cm, $h_a = 3$ cm u. $\beta = 75^\circ$.

4. $a+b+c=18$ cm, $h_a=4$ cm u. $\gamma = 67\frac{1}{2}°$.
5. $a+b+c=18$ cm, $h_b=5$ cm u. $\alpha = 105°$.
6. $a+b+c=19$ cm, $h_c=5$ cm u. $\beta = 112\frac{1}{2}°$.

Aufl. Stellt man bei einem beliebigen Dreieck ABC die Seitensumme her, indem man AB nach links und AC nach rechts an BC anträgt, und verbindet A mit D und E, so ist

BD = BA, also $\sphericalangle D = \frac{1}{2} \sphericalangle B$,

CE = CA, also $\sphericalangle E = \frac{1}{2} \sphericalangle C$,

und somit kennt man von dem Dreieck, das dem Dreieck ADE entspricht, eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. Die Mittellote von AD und AE liefern dann die Ecken B und C. (S. Fig. 32.)

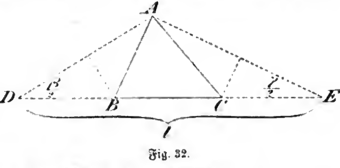


Fig. 32.

Nr. 18. Zusätze zu den Kongruenzsätzen.

Lehrsatz 21. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, während die von diesen eingeschlossenen Winkel verschieden sind, so liegt dem größeren von diesen Winkeln die größere Seite gegenüber.

Vor. (S. Fig. 33.) Es sei DE = AB, DF = AC und $\sphericalangle D > \sphericalangle A$.

Beh. Es ist EF > BC.

Bew. Legt man, wenn AC > AB ist, das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF, daß die Seite AB auf DE, die Ecke A auf D und demnach auch die Ecke B auf E liegt, so fällt die Seite AC zwischen die Schenkel des Winkels EDF, weil $\sphericalangle A < \sphericalangle D$ ist, und teilt den Winkel ECF, der durch Verbindung von C mit F entsteht. Daher ist

1. $\sphericalangle ECF > \sphericalangle DCF$.

Da aber

$\sphericalangle DCF = \sphericalangle DFC$ (DC = DF!)

und $\sphericalangle DFC > \sphericalangle EFC$ ist, so hat man auch

2. $\sphericalangle DCF > \sphericalangle EFC$.

Um so mehr ist

$\sphericalangle ECF > \sphericalangle EFC$,

und somit nach Lehrsatz 13

EF > EC, d. h. EF > BC.

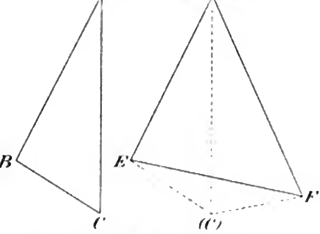


Fig. 33.

Anmerkung. Ist AC < AB, so läßt man die Seiten AC und DF zusammenfallen. Warum ist dies nötig?

Lehrsatz 22. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, während die dritten Seiten verschieden sind, so liegt der größeren von diesen Seiten der größere Winkel gegenüber.

Anl. z. Bew. Der Beweis ist indirekt zu führen. SWS. und Lehrs. 21 kommen zur Verwendung.

Übungen.

Beweise die Sätze:

1. In zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gleichen Hypotenusen liegt dem größeren von zwei spitzen Winkeln die größere Kathete gegenüber.

Anl. z. Bew. Werden die Dreiecke so aufeinander gelegt, daß die Hypotenusen sich ganz und die Winkel der Vor. sich zum Teil bedecken, so läßt sich durch Anwendung der Vor. das Vorhandensein eines stumpfen Winkels nachweisen.

2. In zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gleichen Hypotenusen liegt der größeren von zwei Katheten der größere Winkel gegenüber.

Beweis indirekt.

3. Von zwei rechtwinkligen Dreiecken mit einer gleichen Kathete hat dasjenige die größere Hypotenuse, in welchem der Kathete der größere Winkel anliegt.

4. Von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gleichen Grundlinien hat dasjenige den größeren Schenkel, welches den kleineren Winkel an der Spitze besitzt.

5. Von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gleichen Schenkeln hat dasjenige die größere Grundlinie, welches den größeren Winkel an der Spitze besitzt.

Kapitel 4.

Das Parallelogramm und das Trapez.

Nr. 19. Sätze über Parallelen.

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen an den Schnittpunkten 8 Winkel, die auf verschiedene Arten miteinander zu Paaren vereinigt werden können.

Erklärung. (S. Fig. 34.) a) Die Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heißen **Gegenwinkel** (Gw.).

Gw. sind α u. α', β u. β', γ u. γ', δ u. δ'.

b) Die Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heißen **entgegengesetzte Winkel** (Ew.).

Ew. sind α u. δ', β u. γ', γ u. β', δ u. α'.

c) Die Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auch auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heißen **Wechselwinkel** (Ww.).

Ww. sind α u. γ', β u. δ', γ u. α', δ u. β'.

Fig. 34.

Lehrsatz 23. Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel einander gleich oder ergänzen sich zwei entgegengesetzte Winkel zu 2 R, so sind alle Gegenwinkel und alle Wechselwinkel einander gleich und alle entgegengesetzten Winkel ergänzen sich zu 2 R.



Denn ist z. B. $\alpha' = \alpha$, so ist nach dem Lehrsatz über Scheitelwinkel auch $\alpha = \gamma'$ und $\gamma = \alpha'$, ferner nach dem Lehrsatz über Nebenwinkel $\alpha + \delta' = 2\,R$ usw.

Erklärung. Zwei unbegrenzte Geraden (einer Ebene), die sich nicht schneiden, werden als **parallel** (gleichlaufend) (‖) bezeichnet.

Lehrsatz 24. Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel einander gleich oder ergänzen sich zwei entgegengesetzte Winkel zu 2 R, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Vor. (S. Fig. 35.) Es sei $\alpha' = \alpha$

Beh. Es ist CD ‖ AB.

Bew. Man schneidet die Figur längs der Geraden EF entzwei und legt den Streifen AEFC so auf den Streifen DFEB, daß

1. EF die Strecke FE vollständig bedeckt.

Es fällt dann der Winkel δ auf β' und der Winkel α' auf γ. Da aber $\delta = \beta'$ (nach Lehrsatz 23) ist,

2. so fällt der Strahl EA auf den Strahl FD.

Da ferner $\alpha' = \gamma$ ist,

3. so fällt auch der Strahl FC auf den Strahl EB.

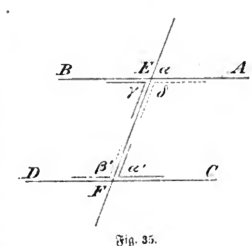


Fig. 35.

Liegen aber EA und FD sowie FC und EB aufeinander, so muß ein Schnittpunkt von EA und FC nach der Deckung zugleich auf EB und FD liegen, d. h. schneiden sich die Strahlen EA und FC, so schneiden sich auch EB und FD. Die Geraden AB und CD hätten dann zwei Schnittpunkte, und dies ist unmöglich. Demnach ist die Annahme, daß EA und FC oder EB und FD sich schneiden, unzulässig, d. h. die Geraden AB und CD sind parallel.

Grundaufgabe. Durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden G zu dieser eine Parallele zu ziehen.

Anl. (S. Fig. 36.) Man zieht durch A eine beliebige Gerade, welche G schneidet, und legt an diese Gerade im Punkte A einen der vier an dem Schnittpunkt entstandenen Winkel so an, daß gleiche Gegenwinkel (oder Wechselwinkel) entstehen. Der zweite Schenkel des angelegten Winkels ist dann die gesuchte Parallele.

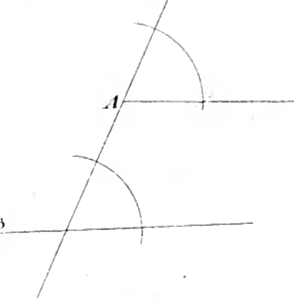


Fig. 36.

Bew. Nach Lehrs. 24.

Bei der Wiederholung der Zeichnung entsteht, wenn auch die Richtung der schneidenden Geraden geändert oder ein anderer von den 4 Winkeln benutzt wird, immer wieder dieselbe Parallele, und daraus folgt:

(Anschauungs-) Satz 2. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich.

Merke: **Um zu beweisen, daß zwei Geraden parallel sind, kann man zeigen, daß sie mit einer beliebigen dritten Geraden gleiche Gegenwinkel oder gleiche Wechselwinkel oder entgegengesetzte Winkel bilden, deren Summe gleich 2 R ist.**

Lehrsatz 25. Werden zwei parallele Geraden durch eine dritte geschnitten, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel paarweis gleich und die entgegengesetzten Winkel ergänzen sich paarweis zu 2 R.

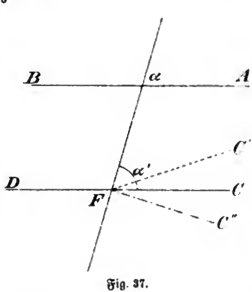


Fig. 37.

Vor. (S. Fig. 37.) Es sei CD ∥ AB.

Beh. Es ist $\alpha' = \alpha$.

Bew. (Indirekt.) Wäre $\alpha' > \alpha$, so könnte man von α' durch die Gerade FC' ein Stück abschneiden und dadurch einen Restwinkel von der Größe des Winkels α herstellen. Nach Lehrs. 4 müßte dann FC' ∥ AB sein.

Wäre $\alpha' < \alpha$, so könnte durch die Gerade FC'' zu α' ein Stück hinzugefügt und in der Summe ein Winkel von der Größe des Winkels α gebildet werden. Nach Lehrs. 24 müßte dann FC'' ∥ AB sein.

Da aber FC ∥ AB ist (Vor.), so hätte man in beiden Fällen zwei durch F gehende Parallelen zu AB, und dies ist unmöglich. Demnach sind die Annahmen $\alpha' > \alpha$ und $\alpha' < \alpha$ unzulässig und α' muß gleich α sein.

Merke: **Um zu beweisen, daß zwei Winkel gleich sind, kann man zeigen, daß sie als Gegenwinkel oder Wechselwinkel an parallelen Geraden liegen.**

Übungen.

Satz 1. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

Anl. z. Bew. Zieht man eine schneidende Gerade, so kann durch zweimalige Anwendung des Lehrs. 25 bewiesen werden, daß die Vor. des Lehrs. 24 erfüllt ist.

Satz 2. Stehen zwei Geraden senkrecht auf einer dritten, so sind sie parallel.

Anl. z. Bew. Senkrechte Geraden bilden rechte Winkel miteinander.

Satz 3. Steht eine Gerade senkrecht auf einer von zwei Parallelen, so steht sie auch senkrecht auf der anderen.

Anl. z. Bew. Von den gleichen Gegenwinkeln ist einer ein Rechter.

Satz 4. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweis parallel und entweder gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel einander gleich.

Anl. z. Bew. Zwei nicht parallele Schenkel bilden einen Winkel φ, der zu den Winkeln der Beh. nach Lehrs. 25 in Beziehung steht.

Zusatz. Ist das eine Schenkelpaar gleich gerichtet und das andere entgegengesetzt gerichtet, so ergänzen sich die Winkel zu 2 R.

Satz 5. Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf den Schenkeln eines anderen und liegt sein Scheitel auf dem Nebenwinkel des letzteren, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Vor. (S. Fig. 38.) Es sei $PQ \perp AB$ und $PR \perp AC$.

Beh. Es ist $\sphericalangle QPR = \sphericalangle BAC$.

Bew. Zieht man $SA \parallel PQ$ und $TA \parallel PR$, so ist nach Satz 4

$$\sphericalangle SAT = \sphericalangle QPR.$$

Da aber $\sphericalangle SAB = R$ ($SA \perp AB$, Satz 3)
und $\sphericalangle TAC = R$ ($TA \perp AC$, Satz 3),
und somit SAT und BAC den Winkel SAC zu einem Rechten ergänzen, so ist

$$\sphericalangle SAT = \sphericalangle BAC,$$

also auch $\sphericalangle QPR = \sphericalangle BAC$.

Fig. 38.

Zusatz. Liegt P zwischen den Schenkeln des Winkels BAC, so ist $\sphericalangle QPR + \sphericalangle BAC = 2\,R$.

Nr. 20. Sätze über ein beliebiges Parallelogramm.

Erklärung. Ein Viereck mit paarweis parallelen Seiten wird Parallelogramm genannt.

Lehrsatz 26. a) In einem Parallelogramm ist die Summe aus je zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gleich 2 R.

b) In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleichgroß.

c) Ein Parallelogramm wird durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt.

Anl. z. Bew. Der Satz über die Winkel bei Parallelen liefert die Gleichheit zweier Winkelpaare. (WSW.)

d) In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

Der Beweis stützt sich auf den Satz c.

e) In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

Anl. z. Bew. Teil d führt in Verbindung mit dem Satz über Winkel bei Parallelen zur Anwendung des WSW.

Folgerung aus b und c. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es auch die drei anderen und das Parallelogramm ist rechtwinklig.

Folgerung aus d. Sind in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich, so ist das Parallelogramm gleichseitig.

Lehrsatz 27. Ein Viereck ist ein Parallelogramm,

a) wenn in ihm je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind.

Anl. z. Bew. Aus $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ folgt $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2R$ sowie $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 2R$.

b) wenn es durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

Anl. z. Bew. Auf a zurückzuführen.

c) wenn bei ihm je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind.

Anl. z. Bew. Jede Diagonale zerlegt das Viereck in zwei nach SSS. kongruente Dreiecke. Damit wird der Beweis auf b zurückgeführt

d) wenn bei ihm zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind.

Anl. z. Bew. Zieht man eine Diagonale, so kann SWS. angewandt werden, um die für die Parallelität der anderen Seiten erforderliche Gleichheit der Wechselwinkel abzuleiten.

e) wenn seine Diagonalen sich gegenseitig halbieren.

Anl. z. Bew. Die Anwendung des SWS. liefert die Gleichheit von Wechselwinkeln. Der Satz ist zweimal zu benutzen.

Folgerung 1. Sind zwei auf einer Geraden nach derselben Seite errichtete Lote gleichlang, so liegen ihre Endpunkte auf einer Parallelen zu dieser Geraden.

Folgerung 2. Lote zwischen Parallelen sind gleichgroß.

Die Verbindung der beiden Folgerungen liefert:

Geometrischer Ort 4. Die im Abstand l zu AB gezogene Parallele ist der Ort aller auf derselben Seite von AB liegenden Punkte, welche von AB die Entfernung l besitzen.

Nr. 21. Sätze über besondere Parallelogramme.

Erklärungen. a) Ein rechtwinkliges Parallelogramm heißt Rechteck.

b) Ein gleichseitiges Parallelogramm heißt Rhombus.

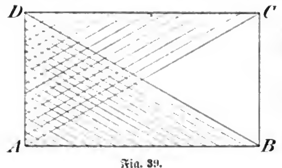


Fig. 39.

c) Ein gleichseitiges und zugleich rechtwinkliges Parallelogramm heißt Quadrat.

Lehrsatz 28. In einem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

Vor. (S. Fig. 39.) Es sei AB ‖ CD, AD ‖ BC und ∢ BAD = R.

Beh. Es ist AC = BD.

Bew. Da ABCD ein Parallelogramm ist, so hat man $AB = DC$ und $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 2R$, also $\sphericalangle ADC = R = \sphericalangle BAD$.

Ferner gehört die Seite AD den beiden Dreiecken DAB und ADC gemeinsam an, und daher sind diese Dreiecke nach SWS. kongruent. Demnach ist $AC = BD$.

Zusatz. In einem schiefwinkligen Parallelogramm ist diejenige Diagonale die größere, welche die Scheitelpunkte der spitzen Winkel miteinander verbindet.

Benutze zum Bew. den Lehrs. 21.

Lehrsatz 29. In einem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Anl. z. Bew. Über jeder Diagonale stehen zwei gleichschenklige Dreiecke.

Folgerung aus Lehrsatz 28 und 29. In einem Quadrat stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und sind gleichgroß.

Die Lehrsätze 28 und 29 können umgekehrt werden.

Lehrsatz 30. Sind die Diagonalen eines Parallelogramms gleichgroß, so ist dieses ein Rechteck.

Vor. (S. Fig. 39.) Es sei $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ und $AC = BD$.

Beh. Es ist $\sphericalangle BAD = R$.

Bew. Aus der Kongruenz der Dreiecke BAD und ADC folgt

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC$. Da aber $AB \parallel CD$,

also $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 2R$,

so ergibt sich $\sphericalangle BAD = R$.

Lehrsatz 31. Stehen die Diagonalen eines Parallelogramms senkrecht aufeinander, so ist dieses ein Rhombus (oder ein Quadrat).

Anl. z. Bew. Jede Diagonale ist das Mittellot der anderen.

Nr. 22. Anwendungen.

Erklärung. Ist ein Punkt die Mitte sämtlicher durch ihn gelegten Verbindungslinien zweier Punkte auf dem Umfang eines Vielecks, so wird der Punkt als Mittelpunkt des Vielecks bezeichnet.

Wird durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms in beliebiger Richtung eine Gerade gezogen, so werden auf dieser durch den Schnittpunkt und zwei Gegenseiten des Parallelogramms gleiche Stücke begrenzt. (Bew. nach WSW.) Daraus folgt:

Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms ist sein Mittelpunkt.

In einem Rechteck sind die Diagonalen, also auch ihre Hälften einander gleich. Daraus folgt:

In einem Rechteck ist der Mittelpunkt von den 4 Ecken gleichweit entfernt (der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die 4 Ecken geht).

Die Diagonalen eines Rhombus halbieren seine Winkel, und somit ergibt sich:

Der Mittelpunkt eines Rhombus ist von den 4 Seiten gleichweit entfernt.

Zusatz. Der Mittelpunkt eines Quadrates ist sowohl von den 4 Ecken als auch von den 4 Seiten gleichweit entfernt.

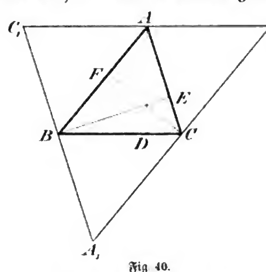


Fig. 40.

Zieht man (s. Fig. 40) durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so entstehen über jeder Seite zwei Parallelogramme, und zwar

über AB: $ABCB_1$ und ABA_1C,
" AC: $ACBC_1$ " ACA_1B,
" AC: $BCAC_1$ " BCB_1A.

Es ist daher:

$A_1C = CB_1$ (beide = AB),
$A_1B = BC_1$ (" = AC),
$B_1A = AC_1$ (" = BC),

und daraus folgt, daß A, B und C die Seitenmitten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind. Demnach erweisen sich die Höhen des Dreiecks ABC als die Mittellote des Dreiecks $A_1B_1C_1$, und da diese sich in einem Punkte schneiden, so ergibt sich:

Lehrsatz 32. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte.

Lehrsatz 33. Die Parallele, welche in einem Dreieck durch die Mitte einer Seite zu einer zweiten gezogen wird, halbiert die dritte Seite und ist halb so groß wie die zweite.

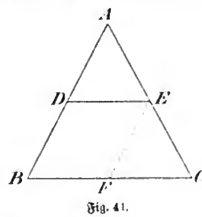


Fig. 41.

Vor. (S. Fig. 41.) Es sei AD = DB und DE ∥ BC.

Beh. Es ist AE = CE und DE = $\frac{1}{2}$ BC.

Bew. Zieht man die Parallele EF zu AB, so entsteht das Parallelogramm DEFB, und daher ist EF = BD, also auch EF = AD.

Da ferner

$\sphericalangle$ EFC = $\sphericalangle$ DAE (Gegenw. bei Parallelen)
und $\sphericalangle$ C = $\sphericalangle$ DEA (" " ")

ist, so folgt: $\triangle$ EFC $\cong$ $\triangle$ ADE und somit 1. **AE = CE.**

Aus der Kongruenz folgt weiter DE = FC,
und da auch DE = BF
ist (Gegenseiten im Parallelogramm DEFB), so ergibt sich der zweite Teil der Beh. 2. **DE = $\frac{1}{2}$ BC.**

Zusatz. Teilt man eine Dreiecksseite in n gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte die Parallelen zu einer zweiten, so teilen die Parallelen die dritte Seite in n gleiche Teile.

Anl. z. Bew. Man zieht als Hilfslinien durch die Teilpunkte der ersten Seite die Parallelen zu der zweiten.

Grundaufgabe. Eine Strecke AB in n gleiche Teile zu teilen.

Ausführung. Man legt durch A eine beliebige Gerade, mißt auf dieser von A aus hintereinander n gleiche Stücke ab, verbindet den Endpunkt des letzten Stückes mit B und zieht zu der Verbindungslinie durch die übrigen Endpunkte die Parallelen.

Lehrsatz 34. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten ist parallel der dritten und halb so groß wie diese.

Vor. (S. Fig. 42.) Es sei $AD = BD$ und $AE = CE$.

Beh. Es ist 1. $DE \parallel BC$ und 2. $DE = \frac{1}{2} BC$.

Bew. Zieht man $EF \parallel AB$ und $AG \parallel BC$, so ist

$$\triangle AEG \cong \triangle CEF \text{ (WSW.)},$$

und somit $GE = EF = \frac{1}{2} GF$.

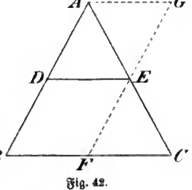


Fig. 42.

Da aber ABFG ein Parallelogramm und daher $GF = AB$ ist, so hat man $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} GF = EF$.

In dem Viereck BFED sind also die Gegenseiten BD und EF gleich und parallel, und demnach ist das Viereck ein Parallelogramm, d. h. es ist $DE \parallel BC$.

Die Richtigkeit des zweiten Teiles der Behauptung ergibt sich jetzt nach Lehrs. 33.

Erklärung. Die Verbindungslinie der Mitte einer Dreiecksseite mit der gegenüberliegenden Ecke heißt Mittellinie des Dreiecks.

Ist O (s. Fig. 43) der Schnittpunkt der Mittellinien AD und BE und $AG = OG$, sowie $BH = OH$, so ergibt sich aus Lehrs. 34

$$GH = \tfrac{1}{2} AB,$$

und da auch $DE = \frac{1}{2} AB$

ist, so folgt $GH = DE$.

Da ferner $GH \parallel AB$ und $DE \parallel AB$, also auch $GH \parallel DE$ ist, so ergibt sich

$$\triangle OGH \cong ODE \text{ (WSW.)},$$

und somit 1. $OD = OG = \frac{1}{2} AO \; (= \frac{1}{3} AD)$,

2. $OE = OH = \frac{1}{2} BO \; (= \frac{1}{3} BE)$.

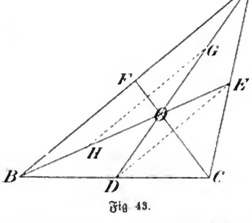


Fig. 43.

Benutzt man statt BE die Mittellinie CF, so schneidet auch diese AD so, daß der Schnittpunkt von D halb so weit entfernt ist wie von A. Dies ist

aber nur möglich, wenn der Schnittpunkt mit O zusammenfällt. Somit besteht der Satz:

Lehrsatz 35. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte, und dieser ist von den Seitenmitten halb so weit entfernt wie von den gegenüberliegenden Ecken.

Übungen.

a) Beweise die Sätze:

1. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei anstoßenden Seiten und dem Abstand zweier Gegenseiten übereinstimmen.

2. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in den beiden Diagonalen und deren Winkel übereinstimmen.

3. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden Diagonalen übereinstimmen.

4. Die 4 Winkelhalbierungslinien eines Parallelogramms begrenzen ein Rechteck.

5. Die 4 Winkelhalbierungslinien eines Rechtecks begrenzen ein Quadrat.

6. Die Mitten der Seiten eines
Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms,
Rhombus " " " " Rechtecks,
Rechtecks " " " " Rhombus.

7. Die Verbindungslinien der Seitenmitten eines Dreiecks zerlegen dieses in 4 kongruente Dreiecke.

8. In einem Dreieck sind die Mitten zweier Seiten von der dritten Seite gleichweit entfernt.

b) Führe die Zeichnungen aus:

Aufg. 1. Ein Dreieck zu zeichnen aus
1. a, b, h_a. 2. a, β, h_a. 3. a, h_a, m_a. 4. α, h_b, b. 5. a, m_a, β.
6. α, h_b, h_c. 7. α, h_b, m_c. 8. α, b, m_b. 9. α, b, m_c. 10. α, h_b, m_b.

Aufg. 2. Ein Dreieck zu zeichnen aus $b + c$, α, h_c.

Aufl. Die Ecke C gehört einem Dreieck aus der Seite $(b + c)$, $\frac{\alpha}{2}$ und h_c an.

Aufg. 3. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a + b + c$ und
1. β und h_a. 2. β und h_c. 3. α und h_b.

Aufg. 4. Mit Benutzung eines Rhombus durch einen Punkt die Parallele zu einer Geraden zu ziehen.

Aufg. 5. Ein Quadrat aus seiner Diagonale zu zeichnen.

Aufg. 6. Ein Rechteck aus einer Seite und der Diagonale zu zeichnen.

Aufg. 7. Einen Rhombus aus der Seite und einer Diagonale zu zeichnen.

Aufg. 8. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, m_b und m_c.

Aufg. 9. Ein Dreieck zu zeichnen aus m_a, m_b, m_c.

Aufl. Die Verlängerung einer Mittellinie um ihren kleineren Abschnitt führt auf ein Dreieck aus $\frac{2}{3} m_a$, $\frac{2}{3} m_b$, $\frac{2}{3} m_c$.

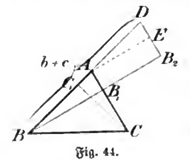


Fig. 44.

Stellt man bei einem Dreieck ABC (s. Fig. 44) die Summe $b + c$ her und fällt von dem Endpunkt D der Summe das Lot auf die Verlängerung der Höhe BB_1, so erhält man in $B_1 B_2$ eine Strecke, die gleich der Höhe CC_1 ist. Denn zieht man $AE \parallel B_1 B_2$, so entsteht ein Dreieck ADE, das dem Dreieck $CC_1 A$ kongruent ist (SWS.). Man hat daher $CC_1 = AE = B_1 B_2$, und somit $BB_2 = h_b + h_c$. Gleichzeitig folgt aus der Kongruenz der beiden Dreiecke: $DE = AC_1$, und da $EB_2 = AB_1$ ist, so ergibt sich: $DB_2 = AB_1 + AC_1$, oder, wenn die (durch

die Höhen gebildeten) Abschnitte AB_1 und AC_1 mit p_{cb}, bzw. p_{bc} bezeichnet werden, $DB_2 = p_{bc} + p_{cb}$. Das rechtwinklige Dreieck BDB_2 hat also die Hypotenuse $b + c$ und die Katheten $h_b + h_c$, bzw. $p_{bc} + p_{cb}$.

Stellt man dagegen die Differenz $b - c$ her (s. Fig. 45) und fällt von dem Endpunkt D der Differenz das Lot auf die Höhe CC_1, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CDC_2, dessen Hypotenuse gleich $b - c$ und dessen Katheten gleich $h_c - h_b$, bzw. $p_{bc} - p_{cb}$ sind.

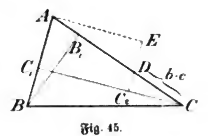


Fig. 45.

Diese Beziehungen sind bei der Auflösung der folgenden Aufgaben zu benutzen.

Aufg. 10. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $b + c$, h_b, h_c.	2. $b + c$, p_{bc}, p_{cb}.	3. b, c, $h_b + h_c$.
4. b, c, $p_{bc} + p_{cb}$.	5. b, $h_b + h_c$, $p_{bc} + p_{cb}$.	6. $h_b + h_c$, p_{bc}, p_{cb}.
7. h_b, h_c, $p_{bc} + p_{cb}$.	8. $b - c$, h_b, h_c.	9. $b - c$, p_{bc}, p_{cb}.
10. b, c, $h_c - h_b$.	11. b, c, $p_{bc} - p_{cb}$.	12. b, $h_c - h_b$, $p_{bc} - p_{cb}$.
13. $h_c - h_b$, p_{bc}, p_{cb}.	14. h_b, h_c, $p_{bc} - p_{cb}$.	

Nr. 23. Sätze über das Trapez.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem nur zwei Gegenseiten parallel sind, wird Trapez genannt. Die nicht parallelen Gegenseiten heißen Schenkel und die Verbindungslinie ihrer Mitten heißt Mittellinie des Trapezes.

Lehrsatz 36. Zieht man in einem Trapez durch die Mitte eines Schenkels die Parallele zu den Grundlinien, so ist diese Parallele die Mittellinie des Trapezes und halb so groß wie die Summe der Grundlinien.

Vor. (S. Fig. 46.) Es sei $CD \parallel AB$, $DE = AE$ und $EF \parallel AB$.

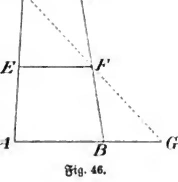


Fig. 46.

Beh. Es ist 1. $CF = BF$ und
2. $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Bew. Zieht man durch F die Gerade DG, so ist EF in dem Dreieck DAG die Parallele zu AG durch die Mitte der Seite AD; daher ist nach Lehrs. 33 $DF = GF$ und $EF = \frac{1}{2} AG$.

Die Dreiecke DFC und GFB stimmen also in einer Seite ($DF = GF$) und den Winkeln ($\sphericalangle FDC = FGB$, Wechselwinkel bei den Parallelen CD und BG!) überein und sind somit kongruent.

Demnach ist

$$1.\ CF = BF$$

und $BG = CD$, also $AG = AB + CD$. Da aber $EF = \frac{1}{2} AG$ ist, so folgt:

$$2.\ EF = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Lehrsatz 37. Die Mittellinie eines Trapezes ist den Grundlinien parallel und gleich der Hälfte ihrer Summe.

Anl. z. Bew. Zieht man wieder durch F die Linie DG, so ist $\triangle DFC \cong \triangle GFB$, weil nun nach Vor. $CF = BF$ ist. Man hat daher $DF = FG$.

Zusatz. Die Mittellinie eines Trapezes geht auch durch die Mitten der Diagonalen.

Übungen.

Beweise die Sätze:

1. Sind in einem Trapez die Schenkel gleich, so sind es auch die Winkel an jeder der Grundlinien.
2. Sind in einem Trapez die Winkel an einer Grundlinie gleich, so sind es auch die Schenkel.
3. In einem Trapez mit gleichen Schenkeln sind die Diagonalen gleich.
4. Die 4 Ecken eines Trapezes mit gleichen Schenkeln liegen auf einem Kreise.
5. Liegen die Ecken eines Trapezes auf einem Kreise, so sind seine Schenkel gleich.
6. In einem Trapez ist die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen den Grundlinien parallel und gleich der Hälfte ihrer Differenz.

Anl. z. Bew. Die Verbindungslinie einer Ecke und der Mitte der nicht zu ihr gehörigen Diagonalen liefert zwei kongruente Dreiecke.

Kapitel 5.

Die Kreislehre.

Nr. 24. Bogen, Mittelpunktswinkel und Sehnen.

Wiederhole die Erklärung und die Sätze in Nr. 5 und 6!

Erklärung. Der Winkel, den die Begrenzungsradien eines Bogens einschließen, wird Mittelpunktswinkel genannt.

Zusatz 1. Zu jedem Bogen gehört nur ein Mittelpunktswinkel und zu jedem Mittelpunktswinkel gehört nur ein Bogen.

Zusatz 2. Der zu einem Halbkreise gehörige Mittelpunktswinkel ist ein gestreckter.

Da die Maßzahl für einen Kreisbogen dieselbe ist wie für den zugehörigen Mittelpunktswinkel, so folgt aus der Erklärung:

Lehrsatz 38. Zu gleichen Bogen eines Kreises (oder zweier Kreise mit demselben Halbmesser)*) gehören gleiche Mittelpunktswinkel, und umgekehrt.

Zusatz. Zu dem größeren von zwei Bogen eines Kreises gehört der größere Mittelpunktswinkel, und umgekehrt.

Erklärung. Die Verbindungslinie zweier Punkte eines Kreises heißt Sehne.

---

*) Dieser Zusatz ist auch bei den weiteren Sätzen zu machen.

Zusatz. Zu jedem Bogen, bzw. Mittelpunktswinkel gehört nur eine Sehne. Von den beiden Bogen, die eine Sehne begrenzt, wird der kleinere als der zu der Sehne gehörige bezeichnet.

Die gleichschenkligen Dreiecke, welche durch Verbindung des Mittelpunktes mit den Endpunkten von Sehnen entstehen, stimmen stets in der Größe der beiden Schenkel überein. Daraus ergibt sich:

Lehrsatz 39. a) Zu gleichen Mittelpunktswinkeln oder Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen, und umgekehrt.

b) Zu dem größeren von zwei Mittelpunktswinkeln oder Bogen eines Kreises gehört die größere Sehne, und umgekehrt.

Nr. 25. Die Sehne und ihr Abstand vom Mittelpunkte.

Aus den Sätzen über das gleichschenklige Dreieck folgt:

Lehrsatz 40. a) Das Lot vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne halbiert die Sehne und den zugehörigen Mittelpunktswinkel (Bogen).

b) Das Mittellot einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Aufg. 1. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises (oder des Kreises, zu dem ein gegebener Bogen gehört) zu bestimmen.

Aufl. Der Mittelpunkt liegt auf den Mittelloten zweier nicht parallelen Sehnen, die beliebig gewählt werden können.

Aufg. 2. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte einen Kreis zu beschreiben.

Lehrsatz 41. a) Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

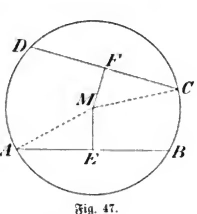


Fig. 47.

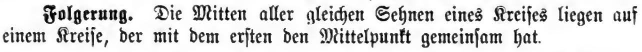
Vor. (S. Fig. 47.) Es sei $AB = CD$, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Beh. Es ist $ME = MF$.

Bew. Verbindet man M mit A und C, so ist

$$MA = MC,$$

und da nach Vor. u. Lehrs. 40a $AE = CF$
und ferner nach Vor. $\sphericalangle E = \sphericalangle F \; (= R)$
ist, so folgt: $\triangle MAE \cong \triangle MCF$ und somit $ME = MF$.



Folgerung. Die Mitten aller gleichen Sehnen eines Kreises liegen auf einem Kreise, der mit dem ersten den Mittelpunkt gemeinsam hat.

Lehrsatz 41. b) Haben Sehnen eines Kreises gleichen Abstand vom Mittelpunkte, so sind sie gleich.

Anl. z. Bew. Die Gleichheit der Sehnenhälften ergibt sich aus der Kongruenz der Dreiecke MAE und MCF.

Lehrsatz 42. a) Die größere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

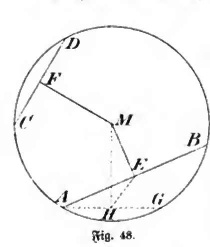


Fig. 48.

Vor. (S. Fig. 48.) Es sei AB > CD, ME ⊥ AB, MF ⊥ CD.

Beh. Es ist ME < MF.

Bew. Zeichnet man (mit Benutzung des Zirkels) die Sehne AG = CD, so liegt G zwischen A und B, da zu der kleineren Sehne der kleinere Bogen gehört. Verbindet man daher E mit der Mitte H von AG, so entsteht der stumpfe Winkel MEH, und daraus folgt ME < MH. Da aber MH = MF ist, so ergibt sich ME < MF.

Lehrsatz 42. b) Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die größere, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte besitzt.

Anl. z. Bew. Der Beweis für die Beziehung zwischen den Sehnenhälften kann indirekt geführt werden. Zur Verwendung gelangt Lehrs. 42a.

Folgerung. Der Durchmesser ist die größte Sehne.

Nr. 26. Mittelpunkts- und Umfangswinkel.

Erklärung. Umfangswinkel heißt ein von zwei Sehnen gebildeter Winkel, dessen Scheitel auf dem Kreise liegt. Ein Umfangswinkel gehört zu oder steht auf dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

Zusätze. Zu jedem Bogen gehören unzählig viele Umfangswinkel. — Zu jedem Umfangswinkel gehört nur ein Bogen.

Die unzählig vielen Umfangswinkel, die mit einem Mittelpunktswinkel auf demselben Bogen stehen, lassen sich zu drei Gruppen zusammenfassen:

a) Der Mittelpunkt liegt auf einem der Schenkel,
b) der Mittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln,
c) der Mittelpunkt liegt außerhalb der Schenkel des Umfangswinkels.

Lehrsatz 43. Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel, der mit ihm auf demselben Bogen eines Kreises steht.

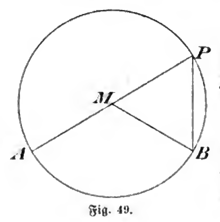


Fig. 49.

Beh. Es ist $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$.

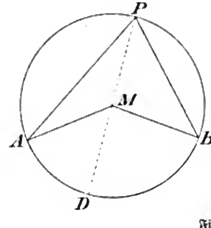
Bew. für den Fall a. (S. Fig. 49.) Der Mittelpunktswinkel ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks MPB, und daher ist nach Folg. 1 zu Lehrs. 10 in Nr. 15

$$\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Bew. für den Fall b. (S. Fig. 50.) Zieht man den Durchmesser PD, so ist der erste Fall zweimal vorhanden, und man hat

$$\sphericalangle APD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AMD,$$
$$\sphericalangle DPB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle DMB,$$

also $$\sphericalangle APD + \sphericalangle DPB = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle AMD + \sphericalangle DMB),$$
d. h. $$\sphericalangle APB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$



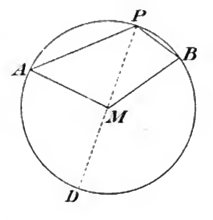


Fig. 50.

Bew. für den Fall c. (S. Fig. 51.) Zieht man wieder den Durchmesser PD, so ist

$$\sphericalangle APD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AMD,$$
$$\sphericalangle DPB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle DMB,$$

also
$$\sphericalangle APD - \sphericalangle DPB = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle AMD - \sphericalangle DMB),$$
d. h. $$\sphericalangle APB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

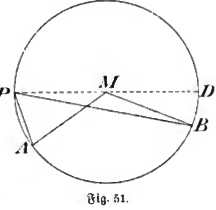


Fig. 51.

Folgerungen. 1. Umfangswinkel auf demselben Bogen eines Kreises sind gleich.

2. Umfangswinkel auf gleichen Bogen eines Kreises oder zweier Kreise mit demselben Halbmesser sind gleich.

3. Der Umfangswinkel in (auf) einem Halbkreis ist ein rechter Winkel.

4. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Umfangswinkel usw.

Merke: **Um die Gleichheit zweier Winkel zu beweisen, kann man zeigen, daß sie als Umfangswinkel auf demselben oder gleichen Bogen eines Kreises oder auf gleichen Bogen zweier Kreise mit demselben Halbmesser stehen.**

Lehrsatz 44. Die Scheitel aller auf derselben Seite über einer Strecke stehenden gleichen Winkel liegen mit den Endpunkten der Strecke auf einem Kreise.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 52.) Der Kreis durch die Punkte A, B und P muß auch durch Q, R usw. gehen. Denn nimmt man an, er träfe BQ in X, und verbindet X mit A, so kann der Satz über Außenwinkel eines Dreiecks benutzt werden, um einen Widerspruch gegen die Voraussetzung abzuleiten, einerlei ob X innerhalb oder außerhalb des Kreises angenommen wird.

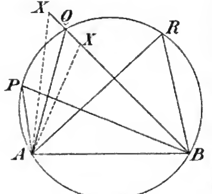


Fig. 52.

Folgerung. Die Scheitelpunkte aller über einer Strecke stehenden rechten Winkel liegen auf dem Kreise, der die Strecke zum Durchmesser hat.

Geometrischer Ort 5. Der Kreis mit dem Durchmesser AB ist der Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch A und B gehen.

Geometrischer Ort 6. Der Kreisbogen über der Strecke AB, auf welchem der Scheitel eines über AB stehenden Winkels von der Größe φ liegt, ist der Ort für die Scheitel aller mit diesem auf derselben Seite von AB liegenden Winkel von der Größe φ, deren Schenkel durch A und B gehen.

Grundaufgabe. Den Kreisbogen zu zeichnen, der über der Strecke AB als Sehne einen Umfangswinkel von der Größe φ besitzt.

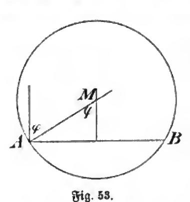


Fig. 53.

Aufl. (S. Fig. 53.) Der Mittelpunkt liegt zunächst auf dem Mittellot von AB. Das Mittellot bildet ferner mit dem nach A führenden Radius einen Winkel von der Größe φ, und daher ist auch der Winkel zwischen diesem Radius und dem Lote in A auf AB gleich φ.

Ausführung. Man zeichnet das Mittellot von AB, errichtet in A das Lot auf AB und legt in A an dies Lot den Winkel φ an. Der Schnittpunkt des zweiten Schenkels mit dem Mittellote ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Anmerkung. Ist $\varphi > R$, so ist $\sphericalangle MAB = \varphi - R$.

Übungen.

Aufg. 1. Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der zu ihr gehörigen Höhe zu zeichnen.

Aufg. 2. Ein Dreieck zu zeichnen aus 1. a, h_a, h_b. 2. a, h_b, h_c. 3. a, h_b, m_a. 4. a, h_b, m_b.

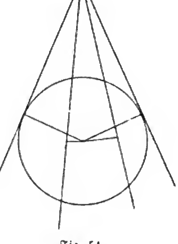
Aufg. 3. Ein Dreieck zu zeichnen aus 1. a, α, h_a. 2. a, α, m_a. 3. a, α, h_b. 4. $a, \alpha, b \pm c$. 5. $a + b + c, \alpha, h_a$. (Der $a + b + c$ gegenüberliegende Winkel ist gleich $R + \frac{\alpha}{2}$.)

Nr. 27. Sekante und Tangente.

Erklärung 1. Eine verlängerte Sehne wird Sekante genannt.

Wird eine Sekante um einen ihrer Punkte außerhalb des Kreises (ihren Ausgangspunkt) gedreht, so ändern ihre Schnittpunkte mit dem Kreise unaus-

gesetzt ihre Lage und der Abstand der zugehörigen Sehne vom Mittelpunkt seine Größe. Fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, so geht der Abstand der Geraden in einen Radius über. Diese Lage kann von der Sekante zweimal eingenommen werden. (S. Fig. 54.) Hierauf stützt sich die


Fig. 54.

Erklärung 2. Hat eine Gerade mit einem Kreise nur einen Punkt gemein, so wird sie Tangente genannt. Der gemeinsame Punkt heißt Berührungspunkt und der nach ihm führende Radius Berührungsradius.

Zusatz. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises können zwei Tangenten an den Kreis gelegt werden.

Lehrsatz 45. Die Tangente steht auf dem Berührungsradius senkrecht.

Der Beweis folgt aus der Ableitung der Erklärung 2 nach Lehrs. 40a.

Folgerung 1. Durch einen Punkt eines Kreises kann nur eine Tangente an den Kreis gelegt werden.

Folgerung 2. Zwei von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangenten sind gleichgroß.

Beweis nach SSW.

Grundaufgabe. Von einem Punkte A an einen gegebenen Kreis die Tangenten zu ziehen.

Ausführung. Man zeichnet den Kreis, der AM zum Durchmesser hat, und verbindet A mit den Schnittpunkten der beiden Kreise.

Geometrischer Ort 7. Das in einem Punkte auf einer Geraden errichtete Lot ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Gerade in diesem Punkte berühren.

Zusatz 1. Die Mittelpunkte aller Kreise mit dem Halbmesser r, welche eine Gerade berühren, liegen auf den beiden im Abstande r zu der Geraden gezogenen Parallelen.

Zusatz 2. Der geometrische Ort 3 kann die Fassung erhalten: Die Halbierungslinie eines Winkels ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche beide Schenkel berühren.

Erklärung 3. Der Winkel, den eine Tangente und eine von ihrem Berührungspunkte aus gezogene Sehne bilden, heißt Sehnentangentenwinkel.

Lehrsatz 46. Jeder Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Umfangswinkel über dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen.

Bew. Nach der Ableitung der Erklärung 2 kann der Sehnentangentenwinkel als Umfangswinkel über dem Bogen AB angesehen werden. Zu einem

von dieser Auffassung unabhängigen Beweise gelangt man, wenn man den Durchmesser AP zieht, um bei der Herstellung des Umfangswinkels die Eigenschaft der Tangente auszunutzen. Es ist dann (s. Fig. 55)

$$\sphericalangle ABP = R \text{ (Winkel im Halbkreis)}$$

und $\sphericalangle PAT = R$ (nach Lehrs. 45).

Demnach ergänzen die Winkel BAT und APB beide den Winkel BAP zu einem Rechten, und daher ist

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle APB.$$

Da ferner $\sphericalangle BAT + \sphericalangle BAT' = 2\,R$ (Nw.)

und $\sphericalangle APB + \sphericalangle AP'B = 2\,R$

$$(= \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta),$$

so ist auch $\sphericalangle BAT' = \sphericalangle AP'B.$

Fig. 55.

Anmerkung. Auf den Lehrs. 46 stützt sich eine zweite, gleichfalls bequeme Herstellung des Ortes 6.

Zusatz. Der Lehrs. 46 kann umgekehrt werden.

Übungen.

Beweise die Sätze:

1. Alle Tangenten, deren Ausgangspunkte vom Mittelpunkte des Kreises die gleiche Entfernung besitzen, sind gleich.

2. Die Ausgangspunkte aller gleichen Tangenten liegen auf einem Kreise, der mit dem ersten Kreise den Mittelpunkt gemeinsam hat.

3. Die Scheitelpunkte gleicher Tangentenwinkel besitzen vom Mittelpunkt die gleiche Entfernung.

Aufg. 1. An einen Kreis eine Tangente von gegebener Richtung zu zeichnen.

Aufg. 2. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen Punkt A geht und eine Gerade G in einem Punkte B berührt.

Aufg. 3. Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu zeichnen, der durch einen Punkt A geht und eine Gerade G berührt. Zwei Lösungen.

Aufg. 4. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei sich schneidende Geraden berührt, und zwar eine von ihnen in einem gegebenen Punkte.

Aufg. 5. Durch einen Punkt A außerhalb eines Kreises eine Sekante so zu ziehen, daß die zugehörige Sehne die Länge l hat ($l < 2r$).

Aufl. Nach der Folgerung zu Lehrs. 41a ist die Sekante eine Tangente an einen leicht zu zeichnenden Kreis. Zwei Lösungen.

Aufg. 6. Eine Sekante zu ziehen, welche in einem Kreise eine Sehne von der Länge $r\left(\frac{r}{2}\right)$ besitzt und

1. auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht,
2. mit einer gegebenen Geraden den Winkel φ bildet.

Aufg. 7. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente von der Länge l gezogen werden kann.

Aufg. 8. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus ein Kreis unter dem Winkel φ gesehen wird.

Aufg. 9. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus an zwei Kreise Tangenten von der Länge l gezogen werden können.

Aufg. 10. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus zwei Kreise unter dem Winkel φ gesehen werden.

Nr. 28. Das ein- und umgeschriebene Dreieck und Viereck.

Erklärung. Liegen die Ecken eines Vielecks sämtlich auf einem Kreise, so sagt man, der Kreis sei dem Vieleck umgeschrieben, und nennt das Vieleck ein Sehnenvieleck. — Sind die Seiten eines Vielecks Tangenten an einen Kreis, so sagt man, der Kreis sei dem Vieleck eingeschrieben, und nennt das Vieleck ein Tangentenvieleck.

Durch die drei Ecken eines Dreiecks ist ein einziger Kreis bestimmt, da die drei Mittellote des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Daraus folgt:

Lehrsatz 47. Jedes Dreieck besitzt einen einzigen umgeschriebenen Kreis.

Da die drei Winkelhalbierungslinien eines Dreiecks sich in einem Punkte treffen, der von den Seiten gleichweit entfernt ist, so ergibt sich:

Lehrsatz 48. Jedes Dreieck besitzt einen einzigen eingeschriebenen Kreis.

Die Berührungspunkte (s. Fig. 56) zerlegen die Seiten in Abschnitte, von denen je zwei (an einer Ecke zusammenstoßende) einander gleich sind. (Folg. 2 zu Lehrs. 45.)

A, t_a, t_a, t_b, t_c, B, C, t_b, t_c

Fig. 56.

Werden diese Abschnitte mit t_a, t_b und t_c bezeichnet, so ist

$2\,t_a + 2\,t_b + 2\,t_c = a + b + c.$

Da aber $2\,t_b + 2\,t_c = 2\,a$

ist, so folgt $\quad 2\,t_a = b + c - a.$

Setzt man nun $\quad a + b + c = 2\,s,$

so hat man $\quad b + c - a = 2\,s - 2\,a = 2\,(s - a),$

und demnach ist $\quad t_a = s - a.$

Entsprechend ergibt sich: $t_b = s - b$ und $t_c = s - c$. Daraus folgt:

Zusatz. Der eingeschriebene Kreis zerlegt die Seiten des Dreiecks so, daß die von A ausgehenden Abschnitte gleich $s - a$,
" " B " " " $s - b$ und
" " C " " " $s - c$ sind.

Ferner schneiden sich die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und der beiden nicht zu ihm gehörigen Außenwinkel in einem Punkte, der von einer Seite und den Verlängerungen der beiden anderen Seiten gleichweit entfernt ist. Der Schnittpunkt ist somit der Mittelpunkt eines Kreises, der die eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt und deshalb äußerer Berührungskreis heißen soll.

Lehrsatz 49. Jedes Dreieck besitzt drei äußere Berührungskreise.

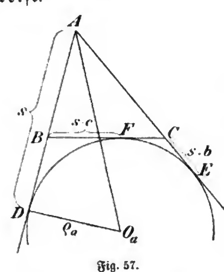


Fig. 57.

Sind D, E und F (s. Fig. 57) die Berührungspunkte des äußeren Berührungskreises, dessen Mittelpunkt O_a auf der Halbierungslinie des Winkels α liegt, so ist wieder

$$AD = AE,\ BD = BF \text{ und } CE = CF.$$

Da aber $AD = AB + BD = AB + BF,$

$AE = AC + CE = AC + CF,$

also $AD + AE = AB + AC + (BF + CF)$

oder $2\,AD = c + b + a$ ist,

so folgt: $AD = AE = s,$

und hieraus: $BD = BF = s - c,$

sowie $CE = CF = s - b.$

In ganz entsprechender Weise lassen sich die Abschnitte, welche durch die Berührungspunkte der beiden anderen Berührungskreise begrenzt werden, durch die Seiten ausdrücken, und somit ergibt sich der

Zusatz. Von den Abschnitten auf den Seiten eines Dreiecks, die durch die äußeren Berührungskreise begrenzt werden, sind die Abschnitte von der Ecke

	A	B	C aus
bei dem Kreise um O_a gleich	**s**	**s — c**	**s — b**
„ „ „ „ O_b „	**s — c**	**s**	**s — a**
„ „ „ „ O_c „	**s — b**	**s — a**	**s**

Lehrsatz 50. In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel 2 R.

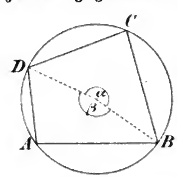


Fig. 58.

Beh. (S. Fig. 58.) Es ist z. B. $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 2R.$

Bew. Der Winkel BAD steht als Umfangswinkel mit dem Mittelpunktswinkel α auf dem Bogen BCD, und daher ist $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\,\alpha.$

In gleicher Weise folgt $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\,\beta,$

und somit: $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta).$

Da aber $\alpha + \beta = 4\,R$ ist, so ergibt sich:

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 2\,R.$$

Lehrsatz 51. Beträgt in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel 2 R, so besitzt das Viereck einen umgeschriebenen Kreis.

Vor. (S. Fig. 59.) Es sei $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2\,R.$

Beh. A, B, C und D liegen auf einem Kreise.

Bew. Ginge der durch B, A und D gelegte Kreis nicht auch durch C, sondern träfe er BC in X, so müßte nach Lehrs. 50 $\sphericalangle A + \sphericalangle X = 2R$ sein. Da aber $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2R$ ist (Vor.), so hätte man $\sphericalangle X = \sphericalangle C$. Nach dem Satze über Außenwinkel ist $\sphericalangle X > C$, wenn X vor C,
und $\sphericalangle X < C$, wenn X hinter C liegt; demnach ist die Gleichheit $X = C$ unmöglich, und somit muß C auf dem Kreise liegen, der durch B, A und D bestimmt wird.

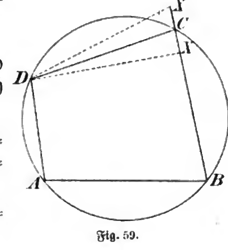


Fig. 59.

Lehrsatz 52. Bei einem Tangentenviereck sind die Summen aus den gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Vor. (S. Fig. 60.) Es sei ABCD ein Tangentenviereck.

Beh. Es ist $AB + CD = AD + BC$.

Bew. Sind E, F, G und H die 4 Berührungspunkte, so ist

$$\left.\begin{array}{l} AB\left\{\begin{array}{l} AE = AH \\ BE = BF \end{array}\right. \\ CD\left\{\begin{array}{l} CG = CF \\ DG = DH \end{array}\right. \end{array}\right\} \begin{array}{l} BC \ (BE = BF,\ CG = CF) \end{array} \ AD,$$

und da Gleiches zu Gleichem addiert Gleiches liefert, so folgt durch Addition: $AB + CD = AD + BC$.

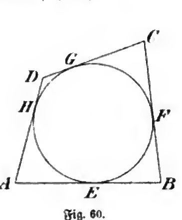


Fig. 60.

Lehrsatz 53. Sind bei einem Viereck die Summen aus den gegenüberliegenden Seiten einander gleich, so besitzt das Viereck einen eingeschriebenen Kreis.

Vor. (S. Fig. 61.) Es sei $AB + CD = AD + BC$.

Beh. ABCD ist ein Tangentenviereck.

Bew. (Indirekt.) Berührte der zu BA, AD und DC gehörige Berührungskreis nicht auch die Seite BC, so könnte man von B aus die Tangente BX ziehen und hätte dann $AB + DX = AD + BX$.

Da aber nach Vor. $AB + DC = AD + BC$
ist, so müßte $DX - DC = BX - BC$
oder $DC - DX = BC - BX$,
d. h. $CX = BX - BC$
oder $= BC - BX$

sein. Beides ist unmöglich, weil die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks stets kleiner ist als die dritte. Demnach muß auch BC den Kreis berühren, d. h. das Viereck ist ein Tangentenviereck.

Fig. 61.



Übungen.

a) Beweise die Sätze:

1. Jedes Rechteck ist ein Sehnenviereck.

2. Jeder Rhombus ist ein Tangentenviereck.

3. Die Verbindungslinie der Fußpunkte zweier Höhen schneidet von dem Dreieck ein Sehnenviereck ab. (Lehrs. 44.)

4. Die drei Höhen eines Dreiecks zerlegen das Dreieck in drei Sehnenvierecke.

Erklärung: In einem Dreieck wird das durch die Fußpunkte der drei Höhen bestimmte Dreieck Höhendreieck genannt.

5. Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel des zugehörigen Höhendreiecks.

6. Der dem Höhendreieck umgeschriebene Kreis halbiert die oberen Höhenabschnitte und die Seiten (**Feuerbachscher Kreis**).

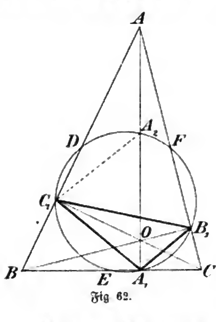


Fig. 62.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 62.) Für das Sehnenviereck AC_1OB_1 ist die Mitte A_2 von AO der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, weil OA Durchmesser sein muß. Daher hat man

$\sphericalangle C_1A_2A_1 = 2 \sphericalangle C_1AO = 2 \sphericalangle C_1B_1O = \sphericalangle C_1B_1A_1$ (5),

d. h. A_2 liegt mit A_1, B_1 und C_1 auf einem Kreise. Auf ganz entsprechende Weise kann man die übrigen Teile der Behauptung beweisen.

b) Aufgaben.

Bezeichnungen. Die Halbmesser der Berührungskreise eines Dreiecks werden mit ϱ (innerer), ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bezeichnet.

Aufg. 1. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. α, w_α, ϱ. 2. α, w_α, ϱ_a. 3. α, h_b, ϱ. 4. α, h_b, ϱ_a.

Aufg. 2. Ein Dreieck zu zeichnen aus

α, w_α, ϱ_b.

Aufg. 3. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $b + c - a$, ϱ, β oder γ. 2. $b + c - a$. ϱ, w_α.

Aufg. 4. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $a + b + c$, ϱ_a, β. 2. $a + b + c$, ϱ_a, w_α.

Aufg. 5. Ein Dreieck zu zeichnen aus

α, $a - b + c$, w_α.

Aufg. 6. Ein Dreieck zu zeichnen aus der Lage der Fußpunkte seiner Höhen.

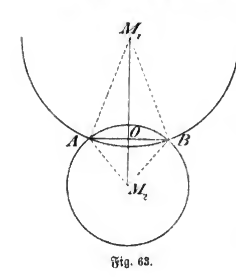


Fig. 63.

Nr. 29. Die Lage zweier Kreise gegeneinander.

Erklärungen. a) Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise heißt Mittelpunktslinie (Zentrale).

b) Zwei Kreise berühren sich, wenn sie nur einen Punkt gemein haben.

Lehrsatz 54. Die Mittelpunktslinie zweier sich schneidenden Kreise ist das Mittellot der gemeinschaftlichen Sehne.

Bew. (S. Fig. 63.) Zieht man die Radien nach den Endpunkten der gemeinschaftlichen Sehne, so entstehen über dieser zwei gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen durch die Mittelpunktslinie verbunden sind. Daraus folgt:

$$M_1M_2 \perp AB \text{ und } AO = BO.$$

Zusatz. Haben zwei Kreise außerhalb der Mittelpunktslinie einen Punkt gemein, so haben sie außerhalb derselben noch einen zweiten Punkt gemein.

Lehrsatz 55. Die Mittelpunktslinie zweier sich berührenden Kreise geht durch den Berührungspunkt.

Bew. (Indirekt. Ginge die Mittelpunktslinie nicht durch den Berührungspunkt, so müßten nach dem Zusatz zu Lehrs. 54 die Kreise zwei Punkte gemeinsam haben und würden sich dann nicht berühren.

Folgerung. (S. Fig. 64.) Zwei sich berührende Kreise besitzen in ihrem Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Fig. 64.

Zusatz 1. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist die Gerade, welche durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und den gegebenen Punkt geht.

Die Berührung kann eine doppelte sein. Liegt der zweite Kreis außerhalb des ersten, so berühren sich die Kreise von außen. Liegt dagegen der eine von den Kreisen innerhalb des anderen, so wird der größere von innen berührt. Die Mittelpunktslinie ist im ersten Falle gleich $r_1 + r_2$ und im zweiten Falle gleich $r_1 - r_2$, bzw. $r_2 - r_1$, d. h.

Zusatz 2. Berühren sich zwei Kreise, so ist ihre Mittelpunktslinie gleich der Summe oder der Differenz der Halbmesser, je nachdem die Kreise sich von außen oder von innen berühren.

Zusatz 2 kann umgekehrt und die Umkehrung kann indirekt bewiesen werden.

Zwei Kreise, die sich weder schneiden noch berühren, liegen entweder ganz auseinander oder der kleinere liegt innerhalb des größeren. Ihre Mittelpunktslinie ist dann entweder größer als die Summe oder kleiner als die Differenz der Halbmesser. Somit sind für die Lage zweier Kreise fünf Fälle denkbar:

1. Ist $M_1M_2 > (r_1 + r_2)$, so liegen die Kreise ganz auseinander;
2. " $M_1M_2 = (r_1 + r_2)$, so berühren sich die Kreise von außen;
3. " $M_1M_2 < (r_1 + r_2)$, aber $> (r_1 - r_2)$, so schneiden sich die Kreise;
4. " $M_1M_2 = (r_1 - r_2)$, so berührt der kleinere Kreis den größeren von innen;
5. " $M_1M_2 < (r_1 - r_2)$, so liegt der kleinere Kreis innerhalb des größeren.

Nr. 30. Gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise.

Ist $A_1 A_2$ (s. Fig. 65) eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise M_1, r_1 und M_2, r_2 ($r_1 > r_2$), so sind die Berührungsradien $M_1 A_1$ und $M_2 A_2$ parallel, weil beide auf $A_1 A_2$ senkrecht stehen. Zieht man daher durch M_2 die Parallele $M_2 T$ zu $A_1 A_2$, so ist $M_2 T A_1 A_2$ ein Parallelogramm und folglich

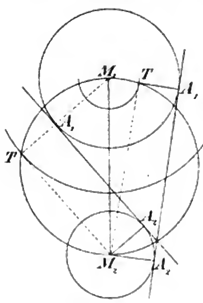


Fig 65.

$\sphericalangle M_1 T M_2 = R$ und $M_1 T = r_1 - r_2$ oder $r_1 + r_2$, je nachdem A_1 und A_2 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Mittelpunktslinie liegen. Zu jeder gemeinschaftlichen Tangente gehört daher auf dem Kreise, der die Mittelpunktslinie zum Durchmesser hat, ein Punkt T, der von M_1 bei einer äußeren Tangente die Entfernung $r_1 - r_2$ und bei einer inneren Tangente die Entfernung $r_1 + r_2$ besitzt.

Demnach ist eine gemeinschaftliche Tangente nur möglich, wenn die Mittelpunkte so liegen, daß der Kreis über $M_1 M_2$ von dem Kreise M_1, $r_1 - r_2$, bzw. M_1, $r_1 + r_2$ geschnitten wird. Daraus folgt:

Lehrsatz 56. Zwei Kreise besitzen gemeinschaftlich
2 äußere und 2 innere Tangenten, wenn sie auseinanderliegen,
2 „ „ 1 „ „ wenn sie sich von außen berühren,
2 „ „ 0 „ „ wenn sie sich schneiden,
1 „ „ 0 „ „ wenn der kleinere den größeren von innen berührt,
und keine Tangente, wenn einer von ihnen ganz innerhalb des anderen liegt, ohne ihn zu berühren.

Grundaufgabe. An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

Ausführung. Man zeichnet den Kreis, der die Mittelpunktslinie zum Durchmesser hat, und beschreibt um den Mittelpunkt des größeren Kreises mit der Differenz bzw. der Summe der Halbmesser einen Kreis, der den Kreis über der Mittelpunktslinie in zwei Punkten trifft (oder berührt). Verbindet man dann die Schnittpunkte mit dem Mittelpunkte des größeren Kreises und zieht durch den zweiten Mittelpunkt die Parallelen zu den Verbindungslinien, so erhält man die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen äußeren bzw. inneren Tangenten.

Für die Anzahl der Lösungen ist nach Lehrs. 56 die Lage der Mittelpunkte maßgebend.

Lehrsatz 57. Die gemeinschaftlichen äußeren und auch die gemeinschaftlichen inneren Tangenten zweier Kreise sind einander gleich.

Zum Beweise addiert, bzw. subtrahiert man die Abschnitte auf den Tangenten zwischen ihrem Schnittpunkte und ihren Berührungspunkten.

Zusatz. Die Strecken, welche die äußeren (inneren) Tangenten auf den inneren (äußeren) begrenzen, sind gleich den (Strecken zwischen den Berührungspunkten der) äußeren (inneren) Tangenten.

Anl. z. Bew. Die Teile einer inneren lassen sich durch die äußeren Tangenten ausdrücken und umgekehrt. Lehrs. 57 ist anzuwenden.

Übungen.

Aufg. 1. Einen Kreis zu zeichnen, der einen Kreis M, r in einem Punkte A berührt und durch einen Punkt B 1. außerhalb, 2. innerhalb des Kreises geht.

Aufl. AB ist eine Sehne des gesuchten Kreises. Liegt B auf der Tangente im Punkte A, so ist keine Lösung möglich. Weshalb?

Aufg. 2. Einen Kreis mit dem Halbmesser r_2 zu zeichnen, der den Kreis M_1, r_1 berührt und durch einen Punkt A geht.

Aufl. Der Kreis $M_1, r_1 + r_2$ enthält den gesuchten Mittelpunkt. Ist $r_2 < r_1$, so kann A auch innerhalb des Kreises liegen; es muß dann aber der Kreis $M_1, r_1 - r_2$ verwandt werden.

Aufg. 3. Einen Kreis mit dem Halbmesser r zu zeichnen, der die beiden ganz auseinander liegenden Kreise M_1, r_1 und M_2, r_2 berührt.

Anmerkung. Die Größe des Halbmessers darf nicht beliebig angenommen werden. Die Bedingung für seine Größe ergibt sich durch Untersuchung der 4 möglichen Fälle,

daß 1. beide Kreise von außen berührt werden sollen,
2. " " " innen berühren sollen,
3. der erste von außen berührt werden und der zweite von innen berühren soll,
4. " " " innen berühren und der zweite von außen berührt werden soll.

Aufg. 4. Einen Kreis mit dem Halbmesser r zu zeichnen, der den Kreis M_1, r_1 und die Gerade G berührt. Wann ist hier eine Lösung nicht möglich?

Aufg. 5. Einen Kreis zu zeichnen, der die Gerade G und den Kreis M_1, r_1 im Punkte A berührt.

Aufl. Die gemeinschaftliche Tangente schneidet G und führt dadurch zur Bestimmung des Berührungspunktes auf der Geraden.

Aufg. 6. Durch einen Schnittpunkt zweier sich schneidenden Kreise eine Sekante so zu ziehen, daß die Summe der auf ihr liegenden Sehnen gleich l ist.

Aufl. Die Lote von den Mittelpunkten auf die Sehnen und die Parallele durch einen der Mittelpunkte zu der Sekante bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck über der Mittelpunktslinie mit einer Kathete von der Länge $\frac{1}{2}$ l. Die Ausführung ist daher nur für $\frac{1}{2} l < M_1 M_2$ möglich.

Aufg. 7. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. α, h_a, ϱ. 2. α, h_a, ϱ_a. 3. α, h_a, ϱ_b.
4. $a + b + c, \varrho, \varrho_a$. 5. $a + b + c, \varrho_a, \varrho_b$.
6. $b + c - a, \varrho, \varrho_a$. 7. $b + c - a, \varrho, \varrho_b$.
8. $\alpha, a + b + c, \varrho$. 9. $\alpha, a + b + c, \varrho_b$ oder ϱ_c.
10. $\alpha, b + c - a, \varrho_a$. 11. $\alpha, b + c - a, \varrho_b$ oder ϱ_c.
12. $\alpha, a - b + c, \varrho$. 13. $\alpha, a - b + c, \varrho_a$ oder ϱ_b.
14. $\alpha, a + b - c, \varrho$. 15. $\alpha, a + b - c, \varrho_a$ oder ϱ_c.

Aufl. Es ist jedesmal an zwei bekannte Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Aufg. 8. An den Kreis M, r eine Tangente zu ziehen, deren Entfernungen von zwei Punkten A und B

1. einander gleich sind,
2. eine gegebene Summe bilden,
3. " " Differenz " .

Aufl. Benutzt man die Sätze über die Mittellinie und die Entfernung der Mitten der Diagonalen in einem Trapez (Nr. 23, Lehrs. 37 und Übungsbeispiel 6), so führt bei 2 und 3 die Auflösung auf eine gemeinschaftliche Tangente an zwei bekannte Kreise.

Kapitel 6.

Der Inhalt geradliniger Figuren.

Nr. 31. Inhalt des Rechtecks und Quadrates.

Erklärung 1. Der Teil der Ebene innerhalb einer geschlossenen Figur wird Flächeninhalt oder kurz Inhalt der Figur genannt.

Erklärung 2. Zwei Figuren heißen gleich (=), wenn ihre Inhalte gleich sind.

Folgerung 1. Sind zwei Figuren kongruent, so sind sie gleich.

Gleich sind also

a) alle kongruenten Dreiecke;
b) alle kongruenten Parallelogramme, insbesondere alle Quadrate mit gleichen Seiten;
c) die Flächen aller Kreise mit gleichen Halbmessern.

Folgerung 2. Zwei Figuren sind gleich, ohne notwendig kongruent zu sein, wenn sie durch Addition oder Subtraktion aus kongruenten Flächenstücken zusammengesetzt werden können.

Erklärung 3. Als Flächeneinheit dient die Fläche eines Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Ist die Längeneinheit 1 m, 1 cm, 1 km, so ist die Flächeneinheit entsprechend 1 qm, 1 qcm, 1 qkm.

Erklärung 4. Ist die Flächeneinheit n-mal in einer Figur enthalten, so sagt man, n sei die Maßzahl für den Inhalt oder kurz der Inhalt der Figur.

Anmerkung. Bei der Inhaltsmessung wird vorausgesetzt, daß die in der Figur auftretenden Linien durch die Längeneinheit in Zahlen ausdrückbar sind. Bei der Berechnung treten diese Maßzahlen an die Stelle der Linien. Wird daher von dem Produkte zweier Linien gesprochen, so versteht man darunter das Produkt ihrer Maßzahlen.

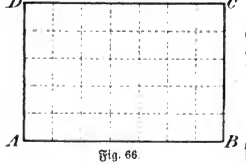


Fig. 66.

Lehrsatz 58. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus zwei anstoßenden Seiten. $\mathbf{J = a \cdot b}$.

Vor. (S. Fig. 66.) Es sei ABCD ein Rechteck.

Beh. Es ist $J = AB \cdot BC$ $(= a \cdot b)$.

Bew. Sind die Maßzahlen a und b für die Seiten eines Rechtecks ganze Zahlen,

so kann AB in a und BC in b der Längeneinheit gleiche Teile zerlegt werden.

Zieht man durch die Teilpunkte von AB die Parallelen zu BC, so zerlegen diese das Rechteck in a kongruente Streifen. Zieht man dann auch durch die Teilpunkte von BC die Parallelen zu AB, so wird jeder dieser Streifen in b, das ganze Rechteck also in $a \cdot b$ Stücke zerlegt, von denen jedes gleich der Flächeneinheit ist. Daraus folgt: $J = a \cdot b$.

Sind dagegen a und b gebrochene Zahlen, die auf denselben Nenner n gebracht die Form $a = \frac{m}{n}$ und $b = \frac{m'}{n}$ besitzen, so kann AB in m und BC in m' gleiche Teile und damit das Rechteck durch die Parallelen zu den Seiten in $m \cdot m'$ gleiche Quadrate zerlegt werden. Da die Seiten dieser Quadrate $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit sind, so ist jedes von ihnen $n \cdot n$-mal in der Flächeneinheit enthalten, also gleich $\frac{1}{n \cdot n}$ der Flächeneinheit. Demnach ist der Inhalt des Rechtecks $\frac{m \cdot m'}{n \cdot n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n} = a \cdot b$.

Folgerung. Der Inhalt eines Quadrates über der Seite a ist $a \cdot a$ oder a^2.

Die zweiten Potenzen der Zahlen werden daher als Quadratzahlen bezeichnet.

Zusatz. Das Produkt zweier Strecken wird durch das Rechteck dargestellt, dessen Seiten die Länge dieser Strecken besitzen.

Übungen.

Die Summe, bzw. Differenz zweier Rechtecke mit einer gleichen Seite ist gleich einem neuen Rechteck, das diese Seite gleichfalls besitzt.

Aufg. 1. Beweise durch Zeichnung die Gleichheit $ab \pm ac = a \cdot (b \pm c)$.

Aufg. 2. Durch Zeichnung die Richtigkeit der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu beweisen.

Aufg. 3. Die Richtigkeit der Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ durch die Zeichnung zu beweisen.

Aufg. 4. Das Rechteck aus $a + b$ und $a - b$ zu bilden und zu zeigen, daß es gleich $a^2 - b^2$ ist.

Aufg. 5. Die Richtigkeit der Gleichheiten zu veranschaulichen:

1. $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$.
2. $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$.
3. $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$.
4. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.
5. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Nr. 32. Der Inhalt von Parallelogrammen, Dreiecken und Vielecken.

Erklärung. Der Abstand zweier einander gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms wird als Höhe und eine der zugehörigen Seiten als Grundlinie des Parallelogramms bezeichnet.

Ein Parallelogramm hat zwei Höhen.

Folgerung. Stehen Parallelogramme mit gleichen Höhen auf einer Geraden, so liegen die den Grundlinien gegenüberliegenden Seiten auf einer Parallelen zu dieser Geraden.

Lehrsatz 59. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

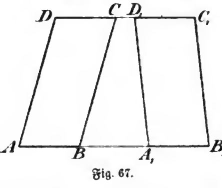


Fig. 67.

Bew. (S. Fig. 67.) Stellt man das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ auf die Verlängerung der Seite AB, so liegt D_1C_1 auf der Verlängerung der Seite DC und es entstehen die beiden Trapeze AA_1D_1D und BB_1C_1C.

In diesen ist $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle C_1$ und $\sphericalangle D = \sphericalangle C$ (Gegenwinkel bei Parallelen!).

Ferner ist $AA_1 = BB_1$ ($= AB + BA_1$, bzw. $A_1B_1 + BA_1$ und $AB = A_1B_1$!),
$DD_1 = CC_1$ ($= DC + CD_1$, bzw. $C_1D_1 + CD_1$ und $DC = D_1C_1$!),
$AD = BC$ und $A_1D_1 = B_1C_1$.

Da hiernach die Trapeze in allen entsprechenden Seiten und Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent, also einander gleich. Zieht man daher von beiden das gemeinsame Trapez BA_1D_1C ab, so bleibt $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

Zusatz. Jedes Parallelogramm ist gleich einem Rechteck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Folgerung. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie und Höhe ($J = g \cdot h$).

Zusatz. Gleiche Parallelogramme mit gleichen Grundlinien bzw. Höhen haben gleiche Höhen bzw. Grundlinien.

Der Beweis ist entweder indirekt oder mit Benutzung des arithmetischen Satzes zu führen, daß aus der Gleichheit $ax = ay$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

Aufg. Ein Parallelogramm durch Parallelen zu einer Seite in n gleiche Teile zu zerlegen.

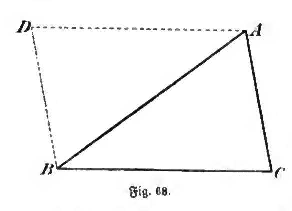


Fig. 68.

Zieht man durch die Ecke A (s. Fig. 68) eines Dreiecks ABC die Parallele zu BC und durch B die Parallele zu AC, so entsteht ein Parallelogramm, das mit dem Dreieck die Grundlinie BC und die zu BC gehörige Höhe gemeinsam hat. Da die Dreiecke ABC und ABD kongruent, also gleich sind, so ist ABC die Hälfte des Parallelogramms, und daraus folgt:

Lehrsatz 60. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Folgerung 1. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zu ihr gehörigen Höhe.

$$J = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c.$$

Folgerung 2. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

Zusatz 1. Bei gleichen Dreiecken über derselben Seite liegen die gegenüberliegenden Ecken auf einer Parallelen zu dieser Seite.

Zusatz 2. Teilt man eine Dreiecksseite in n gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke, so wird dadurch das Dreieck in n gleiche Teile zerlegt.

Aufg. Ein Dreieck in a) 2, b) 3, c) 4 gleiche Teile zu zerlegen.

Aufg. Zu beweisen, daß für ein Dreieck die Formeln richtig sind:

1. $J = \varrho \cdot s.$
2. $J = \varrho_a \cdot (s - a).$
3. $J = \varrho_b \cdot (s - b).$
4. $J = \varrho_c \cdot (s - c).$

Erklärung. Der Abstand der parallelen Seiten eines Trapezes wird als Höhe des Trapezes bezeichnet.

Sind a und b die Grundlinien des Trapezes ABCD (s. Fig. 69), so zerlegt jede Diagonale das Trapez in zwei Dreiecke mit den Grundlinien a und b und der Höhe h. Daraus folgt:

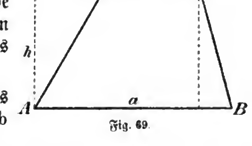


Fig. 69.

Lehrsatz 61. Der Inhalt eines Trapezes mit den Grundlinien a und b und der Höhe h beträgt $\frac{1}{2}(a + b)\,h$.

Zusatz. Der Inhalt eines Vielecks kann berechnet werden, wenn die Grundlinien und Höhen der Dreiecke, in welche sich das Vieleck zerlegen läßt, bestimmt werden können.

Übungen.

Beweise die Sätze:

Satz 1. Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Seiten überein und ist die Summe der von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich 2 R, so sind die Dreiecke gleich.

Die Gleichheit zweier entsprechenden Höhen kann leicht nachgewiesen werden.

Satz 2. Ein Dreieck wird durch die größeren Abschnitte seiner Mittellinien in drei gleiche Teile zerlegt.

Satz 3. In einem Trapeze bilden die Verbindungslinien der Mitte eines Schenkels und der Endpunkte des anderen mit diesem ein Dreieck, das gleich der Hälfte des Trapezes ist.

Satz 4. Das Parallelogramm, dessen Ecken die Mitten der Seiten eines Vierecks sind, ist gleich der Hälfte des Vierecks.

Erklärung. Eine Figur verwandeln heißt die Figur umgestalten, ohne ihren Inhalt zu ändern.

Aufg. 1. Ein beliebiges Parallelogramm mit Beibehaltung einer Seite, 1. in ein Rechteck, 2. in einen Rhombus zu verwandeln.

Aufg. 2. Ein Dreieck mit Beibehaltung einer Seite zu verwandeln
1. in ein gleichschenkliges;
2. in ein rechtwinkliges;
3. in ein Dreieck, in welchem der Seite der Winkel φ gegenüberliegt.

Aufg. 3. Ein Trapez in ein Rechteck zu verwandeln.

Aufg. 4. Ein Parallelogramm mit Beibehaltung einer Seite und eines an dieser liegenden Winkels in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufg. 5. Ein Viereck mit Beibehaltung einer Seite und eines an dieser liegenden Winkels in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Sollen AB und der Winkel A beibehalten werden (s. Fig. 70), so muß die dritte Ecke X so auf AD liegen, daß $\triangle DBX = \triangle DBC$ ist. Die beiden Dreiecke stehen aber über derselben Grundlinie DB und können daher nur dann gleich sein, wenn die zu DB gehörigen Höhen gleich sind, d. h. wenn X und C auf einer Parallelen zu DB liegen. Daraus ergibt sich:

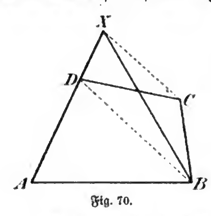


Fig. 70.

Ausführung. Man zieht die Diagonale BD, legt durch C die Parallele zu BD und verbindet den Punkt X, in welchem sie die Seite AD trifft, mit der Ecke B.

Aufg. 6. Ein n-Eck in ein (n−1)-Eck zu verwandeln.

Aufg. 7. Ein n-Eck in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufg. 8. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem eine der den Winkel einschließenden Seiten die Länge 1 hat.

Aufg. 9. Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die zu einem der Schenkel gehörige Höhe eine vorgeschriebene Länge hat.

Aufg. 10. Ein Parallelogramm unter Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem eine Seite die Länge 1 hat.

Aufg. 11. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $a + b + c$, ϱ und h_a.
2. $b + c - a$, ϱ_a und h_a.
3. J, ϱ und ϱ_a.
4. J, ϱ und ϱ_b.
5. J, ϱ_a und ϱ_b.
6. J, ϱ_b und ϱ_c.
7. J, $a + b + c$ und h_a.
8. J, $a + b + c$ und ϱ_a.
9. J, $b + c - a$ und h_a.
10. J, $a + b - c$ und ϱ_b.
11. J, $b + c - a$ und h_b.
12. J, h_a und ϱ_b.

Aufl. Die Entwickelung führt dazu, an zwei bekannte Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Nr. 33. Vergleichung von Parallelogrammen, die weder gleiche Grundlinien noch gleiche Höhen haben.

Lehrsatz 62. Zieht man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale die Parallelen zu den Seiten, so entstehen 4 Parallelogramme. Von diesen sind die beiden gleich, welche nicht von der Diagonale durchschnitten werden. **(Ergänzungsparallelogramme!)**

Bew. (S. Fig. 71.) Es ist $\triangle ABC = \triangle ADC$,
$\triangle ASP = \triangle ARP$
und $\triangle PQC = \triangle PTC$.

Durch Subtraktion folgt hieraus:

$$\triangle ABC - \triangle ASP - \triangle PQC$$
$$= \triangle ADC - \triangle ARP - \triangle PTC,$$

und somit: $SBQP = DRPT.$

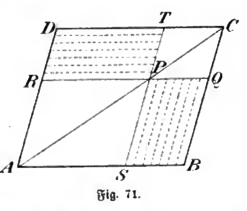


Fig. 71.

Folgerung 1. Auch die Parallelogramme ABQR und ASTD sind einander gleich.

Ist das Parallelogramm ABCD rechtwinklig, so sind auch die Ergänzungsparallelogramme rechtwinklig, und man hat

$$SB \cdot BQ = RP \cdot RD.$$

Hieraus folgt $BQ = \frac{RP \cdot RD}{SB}$.

Zusatz. **Der Quotient $\frac{ab}{c}$ wird dargestellt durch die zweite zu c gehörige Seite eines Rechtecks, das mit ab gleichen Inhalt besitzt.**

Die Herstellung des Quotienten $\frac{ab}{c}$ geschieht auf dem folgenden Wege:

Man verlängert (s. Fig. 72) zwei Gegenseiten des Rechtecks ab um c und stellt die Figur zu dem Satze über Ergänzungsparallelogramme her, indem man einen der Endpunkte zum Ausgangspunkte der Diagonalen macht.

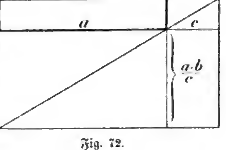


Fig. 72.

Erklärung. Der Abstand zwischen den Fußpunkten der Lote, die von den Endpunkten einer Strecke auf eine Gerade gefällt werden, heißt **Projektion** der Strecke auf die Gerade

Zusatz. Werden die begrenzten Schenkel eines Winkels aufeinander projiziert, so liegen die Endpunkte der Projektionen auf den Schenkeln selbst, wenn der Winkel spitz ist, und auf den über den Scheitel hinaus gezogenen Schenkeln, wenn der Winkel stumpf ist.

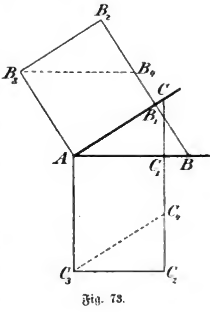


Fig. 73.

Lehrsatz 63. Projiziert man die beliebig begrenzten Schenkel eines Winkels aufeinander und bildet aus je einem Schenkel und der Projektion des anderen ein Rechteck, so entstehen zwei gleiche Rechtecke. **(Projektionensatz.)**

Zeichnung. (S. Fig. 73—75.) Die begrenzten Schenkel des Winkels A seien AB und AC. Man zeichnet $CC_1 \perp AB$, verlängert CC_1 um das Stück C_1C_2 von der Größe AB und vervollständigt

das Rechteck $AC_1C_2C_3$ $(AB \cdot AC_1)$. In entsprechender Weise stellt man das Rechteck $AB_1B_2B_3$ $(AC \cdot AB_1)$ her.

Vor. Es sei $CC_1 \perp AB$ und $C_1C_2 = AB$, $BB_1 \perp AC$ und $B_1B_2 = AC$.

Beh. Es ist $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$.

Bew. Gestaltet man die beiden Rechtecke in Parallelogramme um, in denen auch der zweite Schenkel des Winkels A als Seite vorkommt, indem man $C_3C_4 \parallel AC$ und $B_3B_4 \parallel AB$ zieht, so ist

$$\sphericalangle C_3AC = R + \sphericalangle BAC = \sphericalangle B_3AB.$$

Ist $\sphericalangle BAC > R$, so hat man (s. Fig. 74)

$$\sphericalangle C_3AC = R + \sphericalangle B_3AC_3,$$
$$\sphericalangle B_3AB = R + \sphericalangle B_3AC_3,$$

also ebenfalls $\sphericalangle C_3AC = \sphericalangle B_3AB$.

In beiden Fällen ist daher

$$ACC_4C_3 \cong ABB_4B_3.$$

Da aber $ACC_4C_3 = AC_1C_2C_3 = AB \cdot AC_1$

und $ABB_4B_3 = AB_1B_2B_3 = AC \cdot AB_1$

ist, so ergibt sich:

$$AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1.$$

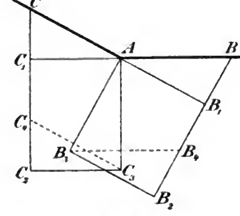


Fig. 74.

Zu einem zweiten Beweise gelangt man, wenn man BB_3 und CC_3 zieht. Es ist dann $\triangle ACC_3 \cong \triangle AB_3B$ (SWS).

Da aber $\triangle ACC_3 = \frac{1}{2}\, AC_1C_2C_3$

und $\triangle AB_3B = \frac{1}{2}\, AB_1B_2B_3$

ist (weil beide Dreiecke mit den zugehörigen Rechtecken auf derselben Grundlinie stehen und gleiche Höhen haben), so ergibt sich:

$$AC_1C_2C_3 = AB_1B_2B_3,$$

also $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$.

Fig. 75.

Ist $\sphericalangle ACB = R$ (s. Fig. 76), so fällt B_1 auf C, und aus dem Rechteck $AB_1B_2B_3$ wird ein Quadrat über AC. Es ist dann

$$AC^2 = AB \cdot AC_1.$$

In entsprechender Weise ergibt sich, wenn man die Schenkel des Winkels B aufeinander projiziert,

$$BC^2 = AB \cdot BC_1, \text{ d. h.}$$

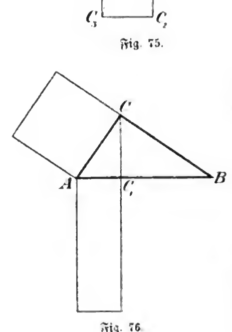


Fig. 76.

Folgerung. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

Übungen.

Aufg. 1. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Man trägt die kleinere Seite des Rechtecks auf der größeren ab, errichtet in dem Endpunkt der abgetragenen Strecke das Lot und über der größeren Seite den Halbkreis. Verbindet man den Schnittpunkt des Lotes und des Halbkreises mit dem Anfangspunkt der beiden Strecken, so erhält man die Seite des gesuchten Quadrates.

Aufg. 2. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich dem a) 3ten, b) 5ten, c) 6ten Teile eines gegebenen Quadrates ist.

Aufg. 3. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von welchem eine Seite die Länge l besitzt.

Aufl. Ist l größer als die Quadratseite a, so ist der Halbkreis über l zu benutzen. Für $l < a$ kommt der Halbkreis über a zur Verwendung.

Aufg. 4. Ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufg. 5. Ein Quadrat in ein gleichschenkliges Dreieck a) mit der Grundlinie a, b) mit der Höhe h_a zu verwandeln.

Aufg. 6. Ein Trapez in ein Quadrat zu verwandeln.

Nr. 34. Der Pythagoreische Lehrsatz und seine Erweiterungen.

Wird der Projektionensatz auf die Schenkel der Winkel A und B eines Dreiecks ABC angewandt, so ergibt sich:

$$AB \cdot AC_1 \ (I) = AC \cdot AB_1 \ (I^a),$$
$$AB \cdot BC_1 \ (II) = BC \cdot BA_1 \ (II^a),$$

und hieraus folgt durch Addition:

$$AB^2 = AC \cdot AB_1 + BC \cdot BA_1 \ (I^a + II^a).$$

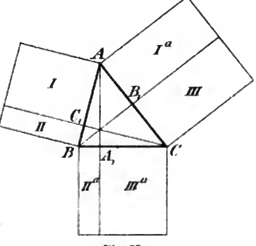


Fig. 77.

a) Ist $\sphericalangle C$ ein spitzer Winkel (s. Fig. 77), so ist

$$AC \cdot AB_1 = AC^2 - AC \cdot CB_1 \ (III)$$

und

$$BC \cdot BA_1 = BC^2 - BC \cdot CA_1 \ (III^a),$$

also $AC \cdot AB_1 + BC \cdot BA_1 = AC^2 + BC^2 - (CA \cdot CB_1 + CB \cdot CA_1)$.
Da aber auch $CA \cdot CB_1 = CB \cdot CA_1$ ist, so kann die Summe $CA \cdot CB_1 + CB \cdot CA_1$ durch $2 CA \cdot CB_1$ oder durch $2 CB \cdot CA_1$ ersetzt werden. Somit folgt: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \cdot CB_1$ oder $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 BC \cdot CA_1$, d. h.

Lehrsatz 64. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem **spitzen** Winkel gegenüberliegt, ist gleich der **Differenz** aus der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten und dem doppelten Rechteck aus einer dieser Seiten und der zugehörigen Projektion der anderen.

b) Ist ∢ C ein rechter Winkel (s. Fig. 78), so fallen die Höhen AA_1 und BB_1 mit den Seiten AC bzw. BC zusammen und die Rechtecke $AC \cdot AB$ und $BC \cdot BA_1$ gehen in die Quadrate AC^2 bzw. BC^2 über. Es ist dann $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d. h.

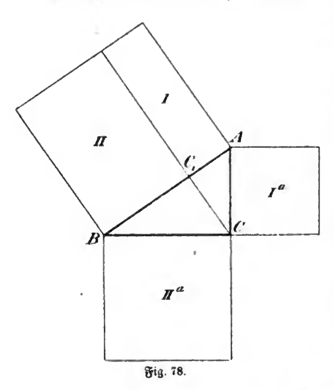


Fig. 78.

Lehrsatz 65. (Pythagoreischer Lehrsatz.) Das Quadrat über der Hypotenuse eines **rechtwinkligen** Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten **($c^2 = a^2 + b^2$).**

Folgerung. Das Quadrat über einer Kathete ist gleich der Differenz aus dem Quadrat über der Hypotenuse und dem Quadrat über der anderen Kathete

($a^2 = c^2 - b^2$ und $b^2 = c^2 - a^2$).

Zusatz 1. **Man addiert die Flächen zweier Vielecke, indem man sie in Quadrate verwandelt und deren Seiten zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks macht. Das Quadrat über der Hypotenuse dieses Dreiecks ist dann gleich der Summe der gegebenen Vielecke.**

Zusatz 2. **Man subtrahiert die Flächen zweier Vielecke, indem man sie in Quadrate verwandelt und von deren Seiten die größere zur Hypotenuse und die kleinere zur Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks macht. Das Quadrat über der anderen Kathete dieses Dreiecks ist dann gleich der Differenz der gegebenen Vielecke.**

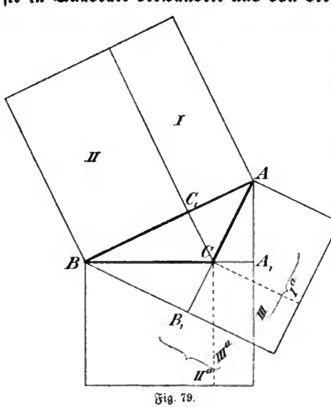


Fig. 79.

c) Ist ∢ C ein stumpfer Winkel, so ist (s. Fig. 79)

$AC \cdot AB_1 = AC^2 + AC \cdot CB_1$ (III)

und

$BC \cdot BA_1 = BC^2 + BC \cdot CA_1$ (III^a).

Da aber

$$AC \cdot CB_1 = BC \cdot CA_1$$

ist, so folgt:

$$AB^2 = AC \cdot AB_1 + BC \cdot BA_1$$
$$= AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CB_1$$

oder

$$= AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CA_1, \text{ d. h.}$$

Lehrsatz 66. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem **stumpfen** Winkel gegenüberliegt, ist gleich der **Summe** aus der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten und dem doppelten Rechteck aus einer dieser Seiten und der zugehörigen Projektion der anderen.

Übungen.

a) Beweise die Sätze:

Satz 1. Bei einem Rhombus ist die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen gleich dem vierfachen Quadrat über seiner Seite.

Satz 2. Bei einem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrat der dritten und dem doppelten Quadrat der zu dieser gehörigen Mittellinie.

Satz 3. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den 4 Seiten.

b) Aufgaben.

Aufg. 1. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der a) Summe, b) Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.

Aufg. 2. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich dem n-fachen eines gegebenen Quadrates ist.

Aufl. Es sei $n = 60$. Man hat $60 = 8^2 - 2^2$.
$n = 84$. " " $84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$.
$n = 47$. " " $47 = 7^2 - 1^2 - 1^2$
oder $47 = 5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$.

Aufg. 3. Ein Dreieck zu zeichnen aus

a) a, $b^2 + c^2$ und 1. β, 2. γ, 3. α, 4. h_a, 5. h_b, 6. h_c, 7. r.
b) a, $b^2 + c^2$ und 1. m_b, 2. m_c.
c) $b^2 + c^2$, m_a und 1. β, 2. γ, 3. α, 4. h_a, 5. h_b, 6. h_c, 7. r.
d) $b^2 + c^2$, m_b und 1. m_a, 2. m_c.

Aufl. Nach Üb. Satz 2 ist $2(b^2 + c^2) = 4 m_a^2 + a^2$. Mit Benutzung dieser Gleichung lassen sich die zur Zeichnung erforderlichen Stücke herstellen.

Aufg. 4. Ein Dreieck zu zeichnen aus
a, $b^2 - c^2 = l^2$ und 1. β, 2. γ, 3. α, 4. h_a, 5. h_b, 6. h_c, 7. m_a, 8. r, 9. m_b, 10. m_c.

Aufl. (S. Fig. 80.) Stellt man b^2 und c^2 mit Benutzung des Pythagoreischen Lehrsatzes dar, indem man das Lot AD auf BC fällt, so ist

$$b^2 = AD^2 + CD^2,$$
$$c^2 = AD^2 + BD^2,$$

also

$$b^2 - c^2 = CD^2 - BD^2 = (CD + BD)(CD - BD).$$

Da $CD + BD = BC = a$ ist,
so hat man $l_2 = a(CD - BD)$
und kann demnach $CD - BD = d$ zeichnen.
Aus $CD + BD = a$
und $CD - BD = d$
folgt dann $2CD = a + d$,
und somit $CD = \frac{1}{2}(a + d)$.

Der Fußpunkt D des Lotes, auf dem A liegt, kann demnach gefunden werden.

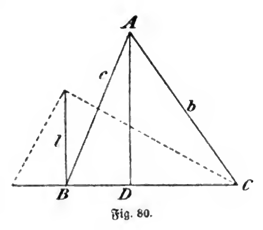


Fig. 80.

c) **Berechnungen.**

1. Ein Quadrat mit der Seite a hat die **Diagonale** $\mathbf{d = a\sqrt{2}}$.

2. Ein **gleichseitiges Dreieck** mit der Seite a hat die **Höhe** $\mathbf{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$.

3. Ein **gleichseitiges Dreieck** mit der Seite a hat den **Inhalt**

$$\mathbf{J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}}.$$

4. Ein **gleichschenkliges Dreieck** mit der Grundlinie a und dem Schenkel b hat den **Inhalt**

$$\mathbf{J = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

5. Ein Dreieck mit den Seiten a, b und c hat den **Inhalt**

$$\mathbf{J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Bew. (S. Fig. 81.) Es ist $J = \frac{1}{2} a h_a$. Da aber $h_a{}^2 = c^2 - a_2{}^2$ und a_2 als Projektion von c auf a mit den Seiten durch die Gleichung (s. Lehrs. 64 bzw. 66)

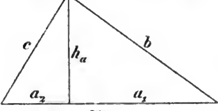


Fig. 81.

$$b^2 = a^2 + c^2 \pm 2a \cdot a_2$$

verbunden ist, so hat man

$$\pm a_2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

und somit $b_a{}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$,

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot \left\{(a+c)^2 - b^2\right\}\left\{b^2 - (a-c)^2\right\},$$

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

Daraus ergibt sich für $a + b + c = 2s$ usw.:

$$J^2 = \frac{a^2 h_a{}^2}{4} = \frac{1}{16} \cdot 2s \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-a)$$

und folglich: $\quad J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Beispiele. $a = 77$, $b = 51$, $c = 40$. $\quad a = 25$, $b = 28$, $c = 17$.

Mit Benutzung der Gleichheiten

$$J = \varrho s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) - \varrho_c(s-c)$$

können nun die Halbmesser der 4 Berührungskreise berechnet werden.

Zweiter Teil.

Die Proportionalität der Größen.

Kapitel 7.

Die Proportionalität der Strecken.

Nr. 35. Verhältnis zweier Strecken. Proportionen zwischen Strecken.

Erklärung 1. Das Verhältnis einer Strecke a zu einer zweiten Strecke b ist die Zahl, welche angibt, wie oft b in a enthalten ist.

$$\left(a : b \text{ oder } \frac{a}{b} = m.\right)$$

Zusatz 1. Läßt sich b eine ganze Anzahl mal auf a abtragen, ohne daß ein Rest bleibt, so ist m eine ganze Zahl. Man sagt dann, b gehe in a auf oder b sei ein Maß von a.

Zusatz 2. Ist weder b ein Maß von a noch a ein Maß von b, so können die Strecken a und b ein gemeinschaftliches Maß l besitzen, das in a p-mal und in b q-mal aufgeht. Es ist dann $a = p \cdot l$ und $b = q \cdot l$, also $a : b = p \cdot l : q \cdot l = \frac{p}{q}$. Das Verhältnis der Strecken a und b ist in diesem Falle der Bruch $m = \frac{p}{q}$.

Ist keine, wenn auch noch so kleine Strecke l vorhanden, die gleichzeitig in a und b aufginge, so kann man b in q gleiche Teile zerlegen. Bleibt dann, wenn das so gewonnene Maß l von b auf a p-mal abgetragen ist, ein Rest r, der kleiner ist als l, so hat man

$$\frac{p}{q} < m < \frac{p+1}{q}.$$

Die beiden Brüche nähern sich dem wahren Werte von m um so mehr, je größer q wird, ohne ihn je ganz zu erreichen. In diesem Falle ist das Verhältnis der Strecken eine irrationale Zahl.

So ist z. B. das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zu seiner Seite oder in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 5 und 6 das Verhältnis der Hypotenuse zu jeder dieser Katheten eine irrationale Zahl.

Auf irrationale Verhältnisse wird in den nächsten Abschnitten nicht eingegangen.

Zusatz 3. Das Verhältnis zweier Strecken ist gleich dem Verhältnis ihrer Maßzahlen, wenn beide Strecken mit derselben Maßeinheit gemessen sind.

Erklärung 2. Sind die Verhältnisse zweier Streckenpaare einander gleich, so bilden die 4 Strecken eine Proportion*) und heißen proportional. $(a : b = c : d.)$

Zusatz 1. Die Strecke d heißt vierte Proportionale zu a, b und c.

Zusatz 2. Ist $c = b$, also $a : b = b : d$, so heißt die Strecke b mittlere Proportionale zu a und d.

Erklärung 3. Liegt ein Punkt C auf einer Strecke AB oder ihrer Verlängerung so, daß $CA : CB = p : q$ ist, so sagt man, AB sei in C oder durch C in dem Verhältnis $p : q$ geteilt.

Zusatz. Liegt der Punkt C zwischen A und B, so teilt er die Strecke AB innen; liegt er dagegen auf der Verlängerung von AB, so teilt er die Strecke außen.

Nr. 36. Proportionen bei dem Dreieck. Strahlenbüschelsatz.

a) Lehrsatz 67. Jede Parallele zu einer Seite eines Dreiecks teilt die beiden anderen Seiten in proportionale Abschnitte.

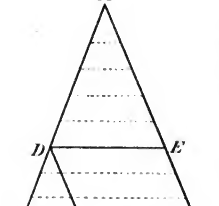


Fig. 82.

Vor. (S. Fig. 82.) Es sei $DE \parallel BC$.

Beh. Es ist $AD : DB = AE : EC$.

Bew. Ist l ein gemeinschaftliches Maß von AD und DB, das in AD p=mal und in DB q=mal enthalten ist, so kann AD in p und DB in q Teile von der Länge l zerlegt werden. Es ist dann

$$1. \quad AD : DB = p \cdot l : q \cdot l = \frac{p}{q}.$$

Zieht man nun durch die Teilpunkte von AD und DB die Parallelen zu BC (DE), so wird durch diese der Abschnitt AE in p und der Abschnitt EC in q gleiche Teile zerlegt. Ist l' die Länge dieser Teile, so hat man:

$$2. \quad AE : EC = p \cdot l' : q \cdot l' = \frac{p}{q}.$$

Die beiden Verhältnisse $AD : DB$ und $AE : EC$ haben demnach denselben Wert, und daraus folgt: $AD : DB = AE : EC$.

Im allgemeinen werden AD und DB ein gemeinschaftliches Maß nicht besitzen. Man teilt dann AD in p gleiche Teile und trägt deren Länge l so oft auf DB ab, als es möglich ist, bis also ein Rest r übrig bleibt, der kleiner als l ist. Zieht man nun durch die Teilpunkte von AD und die q Endpunkte der auf BD abgetragenen Strecken die Parallelen zu BC, so wird AE in p gleiche Stücke von der Länge l' geteilt und EC in q Stücke von der Länge l' und ein Reststück r' zerlegt, das kleiner als l' ist. Demnach liegt der Wert der beiden Verhältnisse $AD : DB$ und $AE : EC$ zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q+1}$ und weicht von $\frac{p}{q}$ um höchstens $\frac{1}{p(q+1)}$ ab. Diese Differenz wird aber um so kleiner, je größer p

*) Die Regeln über Proportionen stehen in Abschnitt II, Nr. 18 und 19.

und damit auch q gewählt wird, und daher können die Verhältnisse AD : DB und AE : EC auch dann als gleich gelten, wenn ihre Glieder ein gemeinschaftliches Maß nicht besitzen.

Zusatz 1. Aus der Proportion $AD:DB = AE:EC$
ergibt sich: $(AD+DB):AD:DB = (AE+EC):AE:EC$
oder $AB:AC = AD:AE = DB:EC$,
d. h. die ganzen Seiten verhalten sich wie zwei entsprechende Abschnitte.

Zusatz 2. Zieht man $DF \parallel AC$, so ist hiernach $AB:BC = AD:FC$. Da aber $FC = DE$ ist (gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm DFCE), so folgt:

$$AB:AD = BC:DE$$

und entsprechend $AC:AE = BC:DE$,
d. h. die geschnittenen Seiten verhalten sich zu ihren oberen Abschnitten wie die dritte Seite zu der schneidenden Parallelen.

Lehrsatz 68. Teilt eine Gerade zwei Dreiecksseiten so, daß ihre entsprechenden Abschnitte proportional sind, so ist sie der dritten Seite parallel.

Vor. Es sei $AD:DB = AE:EC$.

Beh. Es ist $DE \parallel BC$.

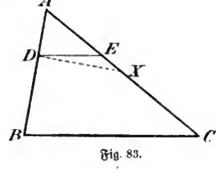


Fig. 83.

Bew. (Indirekt.) (S. Fig. 83.) Ginge die Parallele durch D zu BC nicht durch E, sondern durch den Punkt X auf AC, so hätte man

$$AD:DB = AX:XC,$$

und da nach Vor. $AD:DB = AE:EC$
ist, so wäre $AX:XC = AE:EC$,
und somit $\frac{AX}{AE} = \frac{XC}{EC}$.

Diese Gleichheit ist aber unmöglich, weil einer der Brüche > 1 und der andere < 1 sein muß.

Demnach kann DE nur parallel BC sein.

Zusatz 1. Auch der Zusatz 1 zu Lehrs. 67 ist umkehrbar.

b) Dreht man die Seite AC um A (s. Fig. 84), so ändert sich, falls BC und DE ihre Richtung beibehalten, zwar unausgesetzt die Größe ihrer Abschnitte AE und EC, aber deren Verhältnis bleibt gleich AD : DB. Daraus folgt:

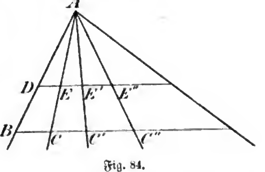


Fig. 84.

Lehrsatz 69. Strahlenbüschelsatz. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels durch Parallelen geschnitten, so sind die entsprechenden Abschnitte auf den Strahlen proportional.

Zusatz. Auch auf den Parallelen sind die entsprechenden Abschnitte proportional.

Der Beweis stützt sich auf Zusatz 2 zu Lehrs. 67.

Merke: **Proportionale Strecken lassen sich dadurch darstellen, daß sie auf zwei Strahlen vom Ausgangspunkte aus als entsprechende Abschnitte abgetragen werden.**

Grundaufgabe 1. Zu drei gegebenen Strecken a, b und c die vierte Proportionale zu zeichnen.

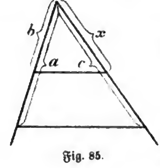


Fig. 85.

Ausführung. (S. Fig. 85.) Man trägt vom Ausgangspunkte zweier Strahlen aus auf einem die Strecken a und b und auf dem anderen die Strecke c ab, verbindet die Endpunkte von a und c miteinander und zieht durch den Endpunkt von b die Parallele zu der Verbindungslinie.

Anmerkung. Es empfiehlt sich, der Wichtigkeit der Aufgabe entsprechend, die anderen Arten der Ausführung aufzustellen.

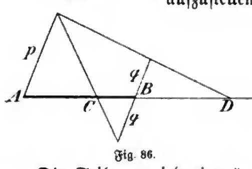


Fig. 86.

Grundaufgabe 2. Eine Strecke AB in dem Verhältnis p : q zu teilen.

Ausführung. (S. Fig 86.) Man zieht durch A und B in irgendeiner Richtung Parallelen, trägt auf diesen von A aus p und von B aus q Längeneinheiten ab und verbindet die Endpunkte miteinander.

Die Teilung wird eine äußere, wenn die abgetragenen Strecken auf derselben Seite von AB liegen.

Nr. 37. Anwendungen des Strahlenbüschelsatzes.

a) Der Beweis des Satzes, daß die Mittellinien eines Dreiecks sich in **einem** Punkte schneiden, der von jeder Ecke doppelt so weit entfernt ist wie von der Mitte der gegenüberliegenden Seite, nimmt bei Benutzung des Strahlenbüschelsatzes die folgende Gestalt an: (S. Fig. 87.)

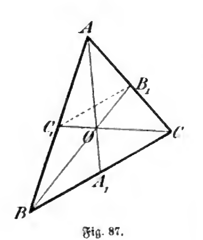


Fig. 87.

Die Verbindungslinie der Mitten B_1 und C_1 der Seiten AB und AC ist parallel BC und gleich $\frac{1}{2}$ BC (Lehrs. 34). Nach dem Zusatz zu Lehrs. 69 ist aber

$$OB : OB_1 = BC : B_1C_1$$

und $$OC : OC_1 = BC : B_1C_1,$$

und somit ergibt sich:

$$OB = 2\,OB_1 \text{ und } OC = 2\,OC_1.$$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch die Mittellinien AA_1 und BB_1 sich in dem Verhältnis 2 : 1 teilen, und da auf BB_1 nur ein Punkt O liegt, für den $OB = 2\,OB_1$ ist, so folgt, daß auch AA_1 durch O geht.

b) Lehrsatz 70. Besteht zwischen 4 Strecken eine Proportion, so ist das Rechteck aus den beiden äußeren Gliedern gleich dem Rechteck aus den beiden inneren.

Vor. (S. Fig. 88.) Es sei $a : b = c : d$.

Beh. Es ist $a \cdot d = b \cdot c$.

Bew. Man trägt auf den Schenkeln eines rechten Winkels die Strecken a (AB) und c (AD), bzw. d (AE) und b (AC) ab. Zieht man dann DE und BC, so ist DE ∥ BC (Lehrs. 68, Zusatz) und somit $\triangle DEB = \triangle DEC$,
also auch $\triangle ABE = \triangle ADC$.
Die beiden Dreiecke sind aber die Hälften der Rechtecke ABFE ($a \cdot d$) und ADGC ($b \cdot c$), und daher ist auch ABFE ($a \cdot d$) = ADGC ($b \cdot c$).

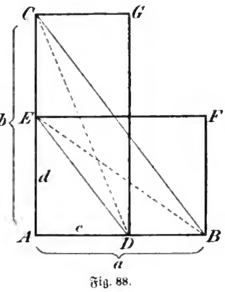


Fig. 88.

Der Lehrs. 70 ist umkehrbar.

Lehrsatz 71. Sind zwei Rechtecke einander gleich, so bilden ihre Seiten eine Proportion, in der zwei anstoßende Seiten des einen äußere und zwei anstoßende Seiten des anderen innere Glieder sind.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 88.) Man legt die beiden Rechtecke so aufeinander, wie sie in der Figur liegen, und zieht die dort angegebenen Hilfslinien. Zusatz zu Lehrs. 60.

Folgerung. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

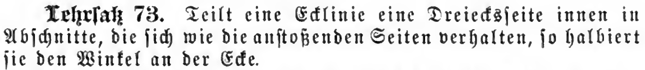
c) Lehrsatz 72. Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels teilt die dem Winkel gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, die sich wie die anstoßenden Seiten verhalten.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 89.) Halbiert man den Winkel A des Dreiecks ABC durch die Gerade AD und überträgt das Verhältnis BD : DC auf die Gerade BA, indem man durch C die Parallele CE zu DA zieht, so kann man mit Benutzung der Sätze über die Winkel bei Parallelen beweisen, daß das Dreieck ACE gleichschenklig ist.

Zusatz. Die Halbierungslinie eines Außenwinkels teilt die gegenüberliegende Seite außen in zwei Abschnitte, die sich wie die anstoßenden Seiten verhalten.

Fig. 89.

Der Lehrs. 72 ist umkehrbar.



Lehrsatz 73. Teilt eine Ecklinie eine Dreiecksseite innen in Abschnitte, die sich wie die anstoßenden Seiten verhalten, so halbiert sie den Winkel an der Ecke.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 89.) Trägt man AC an BA von A aus an und verbindet den Endpunkt E mit C, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie

CE parallel AD ist. Die Beziehungen zwischen den Winkeln an der Grundlinie und den Teilen des Winkels A führen nun auf die Gleichheit dieser Teile.

Wie lautet die Umkehrung des Zusatzes zu Lehrs. 72?

d) Weitere Übungen.

Die Sätze zu beweisen:

Satz 1. Jede Parallele zu den Grundlinien eines Trapezes teilt die Schenkel in proportionale Abschnitte.

Satz 2. Teilt eine Gerade die Schenkel eines Trapezes so, daß die entsprechend liegenden Abschnitte proportional sind, so ist sie den Grundlinien parallel.

Satz 3. Der Schnittpunkt der Schenkel eines Trapezes teilt die Schenkel außen in proportionale Abschnitte.

Satz 4. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Diagonalen oder der Schenkel eines Trapezes mit der Mitte einer der beiden Grundlinien halbiert auch die andere.

Satz 5. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen und der Schenkel eines Trapezes halbiert die Grundlinien.

Aufg. 1. Eine Strecke von der Länge $l = 10$ cm a) innen, b) außen im Verhältnis **1.** $4:5$, **2.** $3:8$, **3.** $7:4$, **4.** $11:6$ zu teilen.

Aufg. 2. Eine Strecke von der Länge $l = 12$ cm in drei Teile zu zerlegen, die im Verhältnis **1.** $2:3:4$, **2.** $2:4:5$, **3.** $3:4:6$, **4.** $3:5:6$ stehen.

Aufg. 3. Eine Strecke AB von der Länge $l = 15$ cm durch die Punkte X und Y so zu teilen, daß die Proportionen entstehen:

1. $AX : XY = 3 : 4$, $XY : YB = 6 : 7$. **2.** $AX : XB = 2 : 7$, $XY : XB = 1 : 2$.

3. $AX : XY = 6 : 7$, $AX : XB = 9 : 5$. **4.** $AY : YB = 8 : 3$, $AX : AY = 6 : 7$.

Aufg. 4. Die Gleichung durch Zeichnung aufzulösen:

1. $\frac{4}{5} = \frac{3}{x}$. **2.** $\frac{3}{7} = \frac{5}{x}$. **3.** $\frac{5}{9} = \frac{x}{4}$. **4.** $\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$.

5. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{x}$. **6.** $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{x}$. **7.** $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{x}$. **8.** $5x = 28$.

9. $ax = bc$. **10.** $ax = b^2$. **11.** $ax = 3b^2$.

Aufg. 5. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1. $a = 6$ cm, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{4}{5}$ und $\alpha = 60^0$. **2.** $a = 8$ cm, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{5}{6}$ und $r = 7$ cm

3. $a = 7$ cm, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{6}{5}$ und $h_c = 4$ cm. **4.** $a = 5$ cm, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{3}{4}$ und $m_c = 3{,}5$ cm.

5. $a = 8$ cm, $\frac{b}{h_a} = \frac{7}{5}$ und $m_a = 5$ cm. **6.** $a = 7{,}5$ cm, $\frac{b}{h_a} = \frac{5}{4}$ und $m_b = 7$ cm.

Aufg. 6. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a + b = l$, $a : b = p : q$ und **1.** c; **2.** α; **3.** m_a; **4.** h_a; **5.** h_b.

Aufl. Aus $a : b = p : q$ ergibt sich $(a + b) : a = (p + q) : p$, oder $(p + q) : p = l : a$. Demnach ist a die vierte Proportionale zu $p + q$, p und l. Da mit a auch b bekannt ist, so ist die Aufgabe auf die Zeichnung eines Dreiecks aus a, b und einem der gegebenen dritten Stücke zurückgeführt.

Aufg. 7. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a - b = l$, $a : b = p : q$ und 1. c; 2. α; 3. m_a; 4. h_a; 5. h_b.

Aufg. 8. Ein Dreieck zu zeichnen aus $h_a + h_b = l$, $a : b = p : q$ und c oder α.

Aufl. Es ist $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, also

$$h_b : h_a = a : b = p : q,$$

und somit
$$(h_a + h_b) : h_a = (q + p) : q,$$

oder
$$(q + p) : q = l : h_a.$$

Mit h_a ist auch h_b bekannt.

Aufg. 9. Ein Dreieck zu zeichnen aus $h_a - h_b = l$, $a : b = p : q$ und c oder α. (Bedingung: $q > p$.)

Aufg. 10. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, b und $h_a + h_b = l$.

Aufl. Aus $h_b : h_a = a : b$ folgt $(a + b) : a = (h_a + h_b) : h_b$ oder $(a + b) : a = l : h_b$. Mit h_b kennt man auch h_a.

Aufg. 11. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, b und $h_a - h_b = l$. (Bedingung: $b > a$.)

Aufg. 12. Ein Dreieck zu zeichnen aus h_a, h_b und h_c.

Aufl. (S. Fig. 90.) Aus

$$a h_a = b h_b \text{ folgt } a : h_b = b : h_a,$$

und aus $b h_b = c h_c$ „ $b : h_c = c : h_b$.

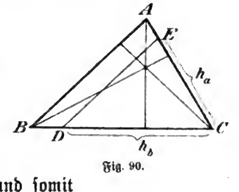


Fig. 90.

Bringt man bei einem beliebigen Dreieck ABC die Proportion $a : h_b = b : h_a$ zur Darstellung, indem man die Höhe h_b dieses Dreiecks von C aus auf CB und die Höhe h_a von C aus auf CA abträgt, und verbindet die Endpunkte D und E miteinander, so ist $DE \parallel AB$, und somit

$$CA : AB = CE : ED, \text{ d. h. } b : c = h_a : ED.$$

Da aber
$$b : c = h_c : h_b$$

ist, so erhält man:
$$h_c : h_b = h_a : ED.$$

Demnach kann DE und dann das Dreieck CDE gezeichnet werden. Nun läßt sich auch die Seite AB herstellen, da sie im Abstande h_c von C parallel DE verläuft.

Aufg. 13. Durch einen Schnittpunkt zweier sich schneidenden Kreise eine Sekante so zu ziehen, daß die auf ihr liegenden Sehnen ein gegebenes Verhältnis besitzen.

Aufl. Das Verhältnis der halben Sehnen kann auf die Mittelpunktslinie durch eine Parallele zu den Abständen der Sehnen übertragen werden. Geschieht dies, so ergibt sich leicht die Richtung der gesuchten Sekante.

Aufg. 14. Auf zwei Seiten eines Dreiecks ABC die Endpunkte einer gegebenen Strecke l so zu legen, daß der obere Abschnitt der Seite AB sich zu dem unteren Abschnitt der Seite AC wie $p : q$ verhält.

Aufl. (S. Fig. 91.) Ist XY die gesuchte Lage und XYCZ ein Parallelogramm, so ist $AX : XZ = AX : CY = p : q$. Die Parallele zu AC durch B schneidet nun AZ in einem Punkte T, der bestimmt ist. Damit kann man AT zeichnen und erhält dann durch den Kreis mit l um C den Punkt Z. Von den Schnittpunkten des Kreises mit AT ist nur einer verwendbar. Die Ausführung ist nur möglich, wenn $p : q$ und l so gewählt sind, daß AT von dem Kreise innerhalb des Dreiecks geschnitten wird.

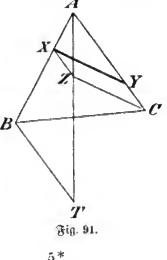


Fig. 91.

Aufg. 15. Zwei Seiten eines Dreiecks ABC durch eine Gerade so zu schneiden, daß ihre oberen Abschnitte sich wie p : q und ihre unteren Abschnitte sich wie r : s verhalten.

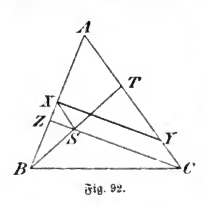


Fig. 92.

Aufl. (S. Fig. 92.) Die Parallele durch C zu der gesuchten Geraden XY trifft AB in einem durch das Verhältnis p : q bestimmten Punkte Z. Zieht man XS ∥ AC, so erhält man in BX : XS oder AB : AT ein Verhältnis, das gleich BX : CY, d. h. gleich r : s ist. Somit kennt man auch den Punkt T. BT und CZ schneiden sich aber in dem Punkte S, durch den die Lösung bestimmt ist.

Aufg. 16. **Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Geraden G_1 und G_2 berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht.**

Aufl. (S. Fig. 93.) Wird P mit dem Schnittpunkt S der Geraden G_1

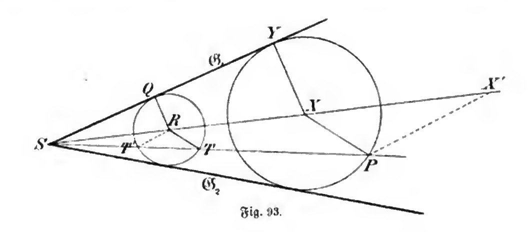


Fig. 93.

und G_2 verbunden, wird ferner um den beliebigen Punkt R der Winkelhalbierenden ein Kreis beschrieben, der die Geraden G_1 und G_2 berührt, so trifft dieser SP in einem Punkte T, dessen Radius TR die Richtung von PX bestimmt. (Zwei Lösungen.)

Kapitel 8.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

Nr. 38. Die Ähnlichkeitssätze.

Erklärung. Zwei Vielecke heißen *ähnlich* (∼), wenn sie in der Größe aller entsprechenden Winkel und in dem Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen.

Aufg. Ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck zu zeichnen.

Aufl. Der Erklärung zufolge muß das gesuchte Dreieck DEF den Bedingungen genügen:

1. $\sphericalangle D = \sphericalangle A$
2. $\sphericalangle E = \sphericalangle B$ } also auch $\sphericalangle F = \sphericalangle C$.
3. $DE : AB = DF : AC$
4. $DE : AB = EF : BC$ } also auch $DF : AC = EF : BC$.

Von diesen 4 Bedingungen können durch die Zeichnung nur zwei erfüllt werden. Entsprechend wie bei der Ableitung der Kongruenzsätze gelangt man hierdurch zu 4 Ähnlichkeitssätzen

Lehrsatz 74. (Hilfssatz.) **Jede Parallele zu einer Dreiecksseite schneidet von dem Dreieck ein ihm ähnliches Dreieck ab.**

Vor. (S. Fig. 94.) Es sei $B_1C_1 \parallel BC$.

Beh. Es ist $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Bew. Aus der Vor. folgt:

1. $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$
2. $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C$ } (Gegenw. bei Parallelen),
3. $AB_1 : AB = AC_1 : AC$ (Lehrs. 67),
4. $AB_1 : AB = B_1C_1 : BC$ (Zusatz 2 zu Lehrs. 67),

und somit sind alle Bedingungen für die Ähnlichkeit der Dreiecke erfüllt.

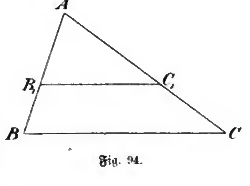


Fig. 94.

Lehrsatz 75. Erster Ähnlichkeitssatz. Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Winkel überein, so sind sie ähnlich.

Vor. (S. Fig. 95.) Es sei $\sphericalangle D = \sphericalangle A$ und $\sphericalangle E = \sphericalangle B$.

Beh. Es ist $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Bew. Trägt man DE auf AB und DF auf AC ab und verbindet die Endpunkte B_1 und C_1 miteinander, so ist $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle DEF$, also $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle E$ und somit $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$. Demnach ist $B_1C_1 \parallel BC$ und nach Lehrs. 74 $\triangle AB_1C_1 \sim ABC$, also auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

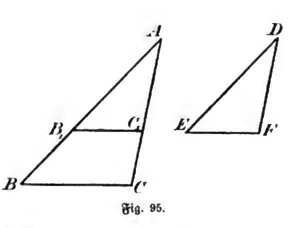


Fig. 95.

Lehrsatz 76. Zweiter Ähnlichkeitssatz. Stimmen zwei Dreiecke in der Größe eines Winkels und in dem Verhältnis der diesen Winkel einschließenden Seiten überein, so sind sie ähnlich.

Vor. Es sei $\sphericalangle D = \sphericalangle A$ und $DE : AB = DF : AC$.

Beh. Es ist $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Bew. Für $AB_1 = DE$ und $AC_1 = DF$ hat man $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle DEF$ und $AB_1 : AB = AC_1 : AC$, also $B_1C_1 \parallel BC$. Somit ist wieder der Lehrs. 74 anwendbar.

Lehrsatz 77. Dritter Ähnlichkeitssatz. Stimmen zwei Dreiecke überein in dem Verhältnis zweier Seiten und der Größe des Winkels, welcher der größeren von diesen gegenüberliegt, so sind sie ähnlich.

Vor. Es sei $DE : AB = DF : AC$ und $\sphericalangle F = \sphericalangle C$. ($AB > AC$.)

Beh. Es ist $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Bew. Für $AB_1 = DE$ und $AC_1 = DF$ hat man $AB_1 : AB = AC_1 : AC$ und somit $B_1C_1 \parallel BC$, also $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$. Da nun auch $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C$ und folglich (Vor.) $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle F$ ist, so hat man $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle DEF$ (SSW.) und demnach $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Lehrsatz 78. Vierter Ähnlichkeitssatz. Stimmen zwei Dreiecke in den Verhältnissen aller entsprechenden Seiten überein, so sind sie ähnlich.

Vor. Es sei $DE : AB = DF : AC$ und $DE : AB = EF : BC$.

Beh. Es ist $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Bew. Für $AB_1 = DE$ und $AC_1 = DF$ hat man $AB_1 : AB = AC_1 : AC$ und somit $B_1C_1 \parallel BC$, also $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$. Da nun aber

$$AB_1 : AB = B_1C_1 : BC$$

und

$$AB_1(DE) : AB = EF : BC \text{ (Vor.)}$$

ist, so folgt $B_1C_1 = EF$ und demnach $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle DEF$ (SSS.), also auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Merke: **Proportionale Strecken können auch als entsprechende Seiten in ähnlichen Dreiecken dargestellt werden.**

Nr. 39. Verhältnis zweier Flächen.

Lehrsatz 79. Zwei Rechtecke mit einer gleichen Seite verhalten sich wie die an diese anstoßenden Seiten.

Bew. Nach Lehrs. 58 ist der Inhalt eines Rechtecks gleich dem Produkt aus zwei anstoßenden Seiten. Hat daher das erste Rechteck die Seiten a und b und das zweite Rechteck die Seiten a und b_1, so sind die Inhalte der Rechtecke gleich $a \cdot b$, bzw. $a \cdot b_1$ und verhalten sich demnach wie $a \cdot b$ zu $a \cdot b_1$, d. h. wie b zu b_1.

Folgerung. Parallelogramme und Dreiecke mit gleichen Grundlinien (Höhen) verhalten sich wie die zugehörigen Höhen (Grundlinien).

Zusatz. Zwei Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus zwei anstoßenden Seiten.

Der Bew. ergibt sich unmittelbar aus Lehrs. 58.

Lehrsatz 80. Zwei Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte aus den Seiten, welche diesen Winkel einschließen.

Vor. Es sei $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$.

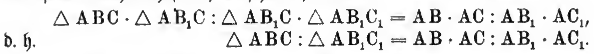
Beh. Es ist $\triangle ABC : \triangle A_1B_1C = AB \cdot AC : A_1B_1 \cdot A_1C_1$.

Bew. (S. Fig. 96.) Legt man die beiden Dreiecke so aneinander, daß die gleichen Winkel A und A_1 zu Scheitelwinkeln werden, und verbindet B_1 mit C, so ist

$$\triangle ABC : \triangle AB_1C = AB : AB_1,$$
$$\triangle AB_1C : \triangle AB_1C_1 = AC : AC_1,$$

Fig. 96.

und somit nach Lehrs. 21, Abschn. II, Nr. 19



$$\triangle ABC \cdot \triangle AB_1C : \triangle AB_1C \cdot \triangle AB_1C_1 = AB \cdot AC : AB_1 \cdot AC_1,$$

d. h.
$$\triangle ABC : \triangle AB_1C_1 = AB \cdot AC : AB_1 \cdot AC_1.$$

Lehrsatz 81. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Bew. Sind ABC und $A_1B_1C_1$ zwei ähnliche Dreiecke, so ist $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A$ und somit nach Lehrs. 80

$$\triangle A_1B_1C_1 : \triangle ABC = A_1B_1 \cdot A_1C_1 : AB \cdot AC$$

oder
$$\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{AB \cdot AC}.$$

Da aber der Ähnlichkeit wegen $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB}$

ist, so ergibt sich
$$\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1B_1}{AB \cdot AB}$$

oder
$$\triangle A_1B_1C_1 : \triangle ABC = A_1B_1^2 : AB^2.$$

Nr. 40. Anwendung der Ähnlichkeitslehre auf Dreiecke und Vielecke.

Lehrsatz 82. In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis zweier entsprechenden Höhen, Mittellinien, Halbmesser usw. gleich dem Verhältnis zweier entsprechenden Seiten.

Anl. z. Bew. Es entstehen stets ähnliche Dreiecke.

Folgerung 1. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Höhen, Mittellinien usw.

Folgerung 2. Ähnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechenden Strecken.

Lehrsatz 83. Die Umfänge (Summen der Seiten) ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten.

Bew. Aus $AB : DE = AC : DF = BC : EF$ folgt $(AB + AC + BC) : (DE + DF + EF) = AB : DE$. (S. Abschn. II, Nr. 19, Lehrs. 20.)

Zusatz. Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie zwei entsprechende Strecken in den Dreiecken.

Lehrsatz 84. Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die Höhe zur Hypotenuse in zwei einander und dem ganzen Dreieck ähnliche Teile zerlegt.

Anl. z. Bew. Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt den rechten Winkel in zwei Teile, welche gleich den spitzen Winkeln des Dreiecks sind.

Folgerung 1. **Jede Kathete ist die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und ihrer Projektion auf diese.**

Folgerung 2. **Die Höhe zur Hypotenuse ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Hypotenuse.**

Aufg. 1. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die **mittlere** Proportionale zu zeichnen.

Wieviel verschiedene Wege sind für die Ausführung möglich?

Aufg. 2. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die **dritte** Proportionale zu zeichnen.

Aufl. Außer den Folgerungen 1 und 2 kann auch der Strahlenbüschelsatz benutzt werden.

Zusatz. Die Quadratwurzel aus ab ($\sqrt{ab}$) wird dargestellt durch die Höhe zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Abschnitte a und b besitzt.

Lehrsatz 85. Ähnliche Vielecke werden durch die von entsprechenden Ecken ausgehenden Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Anl. z. Bew. Die ersten Dreiecke sind nach dem zweiten Ähnlichkeitssatze ähnlich. Daraus lassen sich für die benachbarten Dreiecke die Bedingungen zur Anwendung desselben Satzes herleiten.

Lehrsatz 86. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten oder zwei entsprechend gezogene Linien.

Übungen.

a) Beweise den Satz:

1. Stehen die Seiten zweier Dreiecke senkrecht aufeinander, so sind die Dreiecke ähnlich.

2. Sind je zwei entsprechende Seiten zweier ähnlichen Dreiecke (Vielecke) parallel, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken in einem Punkte.

3. Jede Sehne eines Kreises ist die mittlere Proportionale zu einem Durchmesser, der durch einen ihrer Endpunkte geht, und ihrer Projektion auf diesen Durchmesser.

4. In einem Kreise ist das Quadrat einer Sehne 4 mal so groß wie das Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers, der auf der Sehne senkrecht steht.

5. Der Halbmesser eines Kreises ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten, welche zwei parallele Tangenten auf einer dritten Tangente (von deren Berührungspunkt aus gerechnet) begrenzen.

Aufg. 3. Ein Dreieck zu zeichnen, das sich zu einem gegebenen Dreieck wie $p:q$ verhält, wenn außerdem gegeben ist

a) a und ϱ. (Zunächst kann h_a gezeichnet werden. Die Beziehungen zum Inhalt liefern dann $2s$ und damit $s-a$, also auch den Winkel α.)

b) a und ϱ_a. c) a und ϱ_b. d) h_b und ϱ_c.

e) ϱ und α. f) ϱ_a und α. g) ϱ_a und β.

Aufg. 4. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b : h_b = p : q$ und 1. h_a, 2. c, 3. m_a, 4. α, 5. β oder γ.

Aufl. Zur Darstellung des Verhältnisses $b : h_b$ errichtet man in C auf BC das Lot CD und in A auf AC das Lot AD. Es ergibt sich dann: $CD : BC = b : h_b = p : q$.

b) Ausführung von Aufgaben nach dem Ähnlichkeitsverfahren.

Bei einer Reihe von Aufgaben ist es nach Ausscheidung eines Bestimmungsstückes möglich, ein Dreieck zu zeichnen, das dem gesuchten Dreieck ähnlich ist. Aus dem ähnlichen Dreieck erhält man dann das gesuchte, wenn man dort das ausgeschiedene Bestimmungsstück herstellt, ihm die vorgeschriebene Länge gibt und durch den Endpunkt bzw. die Endpunkte die Parallelen zu den Seiten zieht.

Aufg. 5. Ein Dreieck zu zeichnen aus $b : c = p : q$, α und ϱ.

Ausführung. (S. Fig. 97.) Man stellt auf den Schenkeln des Winkels α in $A'B' : A'C'$ das Verhältnis $p : q$ her und verbindet B' mit C'. Ist dann in dem Dreieck $A'B'C'$ der eingeschriebene Kreis gezeichnet, so gibt man den Berührungsradien die vorgeschriebene Länge und zieht durch die Endpunkte die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$.

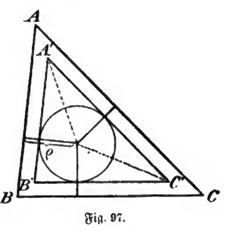


Fig. 97.

Aufg. 6. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $b : c = p : q$, α und a oder m_a, h_b, w_γ, r, ϱ_a usw.
2. $a : h_a = p : q$, α und m_a, " " " "
3. $a : h_a = p : q$, $a : b = r : s$ und " " " " "
4. $(a \pm b) : c = p : q$, α und " " " " "
5. a, $h_b : h_c = p : q$ und α.
6. r, α und $h_a : h_b = p : q$.
7. r, α und $h_b : h_c = p : q$.
8. $h_a : h_b = p : q$, h_c und β.
9. $a + m_a$, β und γ.
10. $b : w_\alpha = p : q$, h_a und α.

Aufg. 7. Einem gegebenen Dreieck ABC ein Rechteck einzuschreiben, dessen Seiten das Verhältnis $p : q$ besitzen.

Aufl. (S. Fig. 98.) Die Ecken des gesuchten Rechtecks $XYZU$ sollen auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen und sind daher bekannt, wenn die Richtung ihrer Verbindungslinien mit den gegenüberliegenden Ecken angegeben werden kann. Zieht man aber z. B. BZ und legt durch einen beliebigen Punkt P von BZ die Parallele PQ zu UZ und zeichnet $QR \perp UX$,

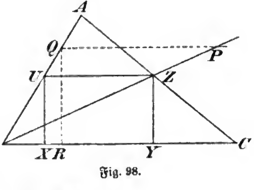


Fig. 98.

so hat man $BQ : BU = QP : UZ = QR : UX$,

und somit $QP : QR = UZ : UX = p : q$.

Zieht man daher durch einen beliebigen Punkt Q auf AB das Lot QR zu BC und die Parallele zu BC und zeichnet QP so, daß $q : p = QR : QP$ ist, so

erhält man in BP eine Gerade, welche AC in einer Ecke des gesuchten Rechtecks schneidet.

Aufg. 8. Einem Dreieck ABC einzuschreiben

1. ein Quadrat,

2. ein gleichseitiges Dreieck, von dem eine Seite auf BC senkrecht steht oder BC parallel ist,

3. ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf BC senkrecht steht oder BC parallel ist,

4. ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse zu einer Kathete sich wie p : q verhält und BC parallel ist,

5. ein Dreieck, dessen Seiten auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht stehen,

6. ein zu ABC ähnliches Dreieck, von welchem eine Seite BC parallel ist oder auf BC senkrecht steht.

c) Verwendung von Gleichungen zur Ausführung der Aufgaben.

Die Hilfsmittel ermöglichen häufig eine mehrfache Ausführung der Aufgaben, je nachdem zur Auflösung nur die planimetrischen Lehrsätze oder auch die Gesetze der Arithmetik verwandt werden.

Aufg. 9. Eine Strecke AB so zu teilen, daß die Summe aus den Quadraten der Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate ist ($AX^2 + BX^2 = l^2$).

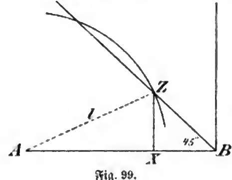


Fig. 99.

Aufl. 1. (S. Fig. 99.) Man erhält die Summe $AX^2 + BX^2$, wenn man in X auf AB das Lot XZ mit der Länge XB errichtet, Z mit A verbindet und über AZ das Quadrat zeichnet. Es ist dann $AZ^2 = AX^2 + XZ^2 = AX^2 + XB^2 = l^2$, und somit liegt Z auf dem Kreise A, l. Zieht man ferner BZ, so entsteht ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck BXZ, und daher ist $\sphericalangle XBZ = 45^0$.

Ausführung. Man zeichnet um A den Kreis mit l, errichtet in B auf AB das Lot, halbiert den rechten Winkel und fällt von einem der Schnittpunkte der Halbierungslinie mit dem Kreise A, l das Lot auf AB. — Die Teilung wird eine äußere, wenn $l > AB$ ist.

Aufl. 2. $AX^2 + BX^2 = l^2$ ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Da aber $BX = AB - AX$ (und bei der äußeren Teilung gleich $AX - AB$) ist, so kann BX eliminiert werden. Man erhält dann:

$$AX^2 + (AB - AX)^2 = l^2, \text{ also } 2\,AX^2 - 2\,AB \cdot AX + AB^2 = l^2,$$

oder

$$AX^2 - AB \cdot AX = \frac{l^2 - AB^2}{2},$$

und hieraus:

$$AX = \tfrac{1}{2}\,AB \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,AB^2 + \tfrac{1}{2}\,l^2 - \tfrac{1}{2}\,AB^2},$$

oder

$$AX = \tfrac{1}{2}(AB \pm \sqrt{2\,l^2 - AB^2}).$$

Demnach ergibt sich als

Ausführung. Man mißt auf den Schenkeln eines rechten Winkels die Strecke l ab ($2l^2$!), errichtet über der dadurch bestimmten Hypotenuse den Halbkreis und trägt in diesen AB als Sehne ein ($2l - AB^2$!). Verbindet man dann den Endpunkt der Sehne mit dem zweiten Endpunkt der Hypotenuse ($\sqrt{2l^2 - AB^2}$!), addiert die Länge der Verbindungslinie zu AB und halbiert die dadurch entstehende Summe, so erhält man AX. — Die Subtraktion der Quadratwurzel hätte nur eine Vertauschung von AX mit BX zur Folge.

Aufg. 10. Eine Strecke AB so zu teilen, daß das Rechteck aus den Abschnitten gleich einem gegebenen Quadrate l^2 ist.

Anmerkung. Die äußere Teilung tritt für $l > \frac{1}{2}AB$ ein.

Aufg. 11. Eine Strecke AB so zu teilen, daß das Quadrat des einen Abschnittes doppelt so groß ist wie das Quadrat des anderen.

Aufl. Die Forderung $AX^2 = 2\,BX^2 = BX^2 + BX^2$ läßt AX als Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks mit den Katheten BX erscheinen. Hieraus läßt sich die Größe zweier in A und B anzulegenden Winkel ableiten, deren freie Schenkel den Scheitel Z des rechten Winkels bestimmen. X ist dann die Spitze eines über BZ stehenden gleichschenkligen Dreiecks.

Aufg. 12. Eine Strecke AB so zu teilen, daß die Differenz aus den Quadraten der Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate ist.

Zur Auflösung. 1. Die Forderung $AX^2 - BX^2 = l^2$ oder $AX^2 = l^2 + BX^2$ weist darauf hin, in B auf AB das Lot BC von der Länge l zu errichten.

2. Aus $AX^2 - BX^2 = l^2$ folgt $(AX + BX) \cdot (AX - BX) = l^2$ und somit
für die innere Teilung $AB : l = l : (AX - BX)$,
" " äußere " $AB : l = l : (AX + BX)$.
In beiden Fällen kennt man also $AX + BX$ und $AX - BX$; die halbe Summe dieser Strecken ist aber gleich AX.

3. Eliminiert man BX, so ergibt sich eine Gleichung ersten Grades für AX.

Aufg. 13. Eine Strecke AB in X so zu teilen, daß $AX^2 = AB \cdot BX$ ist.

Anmerkung. Diese Aufgabe **(der goldene Schnitt)** ist hier nur als Beispiel für die algebraische Auflösung aufgenommen.

Aufg. 14. Ein Rechteck mit dem Inhalt l^2 so zu zeichnen, daß
1. zwei anstoßende Seiten sich wie p zu q verhalten,
2. zwei anstoßende Seiten sich um d unterscheiden,
3. zwei anstoßende Seiten die Summe s besitzen. Wann wird die Ausführung unmöglich?

Aufg. 15. Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c zu zeichnen,
1. dessen Katheten sich wie p zu q verhalten,
2. bei welchem eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und anderen Kathete ist.

Aufg. 16. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, bei welchem sich die Katheten wie p zu q verhalten und die Seiten die Summe 2 s besitzen.

d) Verwandlungsaufgaben. Teilung von Dreiecken.

Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie die zugehörigen Grundlinien. Wird daher eine Dreiecksseite einer gegebenen Bestimmung gemäß geteilt und der Teilpunkt mit der gegenüberliegenden Ecke verbunden, so teilt die Ecklinie das ganze Dreieck in der Weise, wie es die gegebene Bestimmung verlangt. Soll dann der eine Teil der Figur eine vorgeschriebene Gestalt besitzen, so ist noch die Ausführung einer Verwandlungsaufgabe erforderlich.

Da bei den folgenden Verwandlungsaufgaben stets der gleiche Gedankengang zur Auflösung führt, so genügt es, eine von ihnen ausführlich zu besprechen.

Aufg. 17. **Ein gegebenes Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels A in ein anderes zu verwandeln, in welchem die A gegenüberliegende Seite einer gegebenen Geraden G parallel ist.**

Aufl. (S. Fig. 100.) Das gesuchte Dreieck AXY ist nur dann gleich dem Dreieck ABC, wenn

$$\triangle CXY = \triangle CXB,$$

also $BY \parallel CX$ ist, und daraus folgt:

1. $AX : AB = AC : AY.$

Nun soll $XY \parallel G$ sein. Stellt man aber bei dem **bekannten** Punkte C durch die Parallele CD zu G die Richtung von XY her, so ist

2. $AC : AY = AD : AX,$

und somit

3. $AD : AX = AX : AB.$

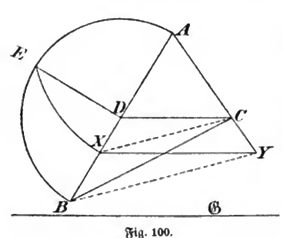


Fig. 100.

AX ist also die mittlere Proportionale zu den bekannten Strecken AB und AD.

Ausführung. Man zieht $CD \parallel G$, errichtet in D das Lot auf AB, zeichnet den Halbkreis über AB und trägt die Entfernung der Ecke A von dem Punkte E, dem Schnittpunkte des Halbkreises und des Lotes, von A aus auf AB ab. Zieht man dann durch den Endpunkt X die Parallele XY zu CD, so ist die Verwandlung ausgeführt. — Liegt D auf der Verlängerung von AB, so ist der Halbkreis über AD und das Lot in B zu errichten.

Aufg. 18. Ein Dreieck in Beibehaltung eines Winkels zu verwandeln in

1. ein gleichschenkliges, in welchem der Winkel an der Spitze liegt,
2. " " " " " " " " Grundlinie "
3. ein Dreieck, in welchem sich die einschließenden Seiten wie $p : q$ verhalten,
4. ein Dreieck, in welchem ein zweiter Winkel die Größe φ besitzt.

Wann sind 2. und 4. unmöglich?

Aufg. 19. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln (ein gleichseitiges Dreieck mit gegebenem Inhalt zu zeichnen).

Aufg. 20. Ein Dreieck mit gegebenem Inhalt zu zeichnen, das einem gegebenen Dreieck ABC ähnlich ist.

Zur Aufl. Zuerst ist ein Dreieck mit dem Winkel A herzustellen.

Aufg. 21. Ein gegebenes Viereck mit Beibehaltung einer Seite und der beiden anliegenden Winkel in ein Trapez zu verwandeln.

Zur Aufl. Man verlängert die nicht gemeinsamen Schenkel bis zu ihrem Schnittpunkt.

Aufg. 22. Ein Dreieck ABC durch eine Parallele zu BC im Verhältnis p : q zu teilen.

Aufg. 23. Ein Dreieck ABC durch Parallelen zu BC in drei gleiche Teile zu teilen.

Zur Aufl. Es sind zwei Verwandlungen auszuführen.

Aufg. 24. Ein Dreieck ABC durch eine Parallele zu BC stetig zu teilen. (S. Aufg. 13.)

Nr. 41. Anwendung der Ähnlichkeitslehre auf den Kreis.

a) Sehnen und Tangenten.

Zwei Sehnen eines Kreises AB und CD (s. Fig. 101a u. 101b) schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind, entweder innerhalb oder ihre Verlängerungen schneiden sich außerhalb des Kreises. In beiden Fällen liefern die Verbindungslinien AD und CB zwei Dreiecke EAD und EBC, die in der Größe der entsprechenden Winkel übereinstimmen und daher ähnlich sind. Für die von E aus gerechneten (Teil-)Strecken besteht demnach die Proportion

$$EA : EC = ED : EB.$$

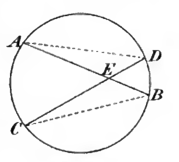


Fig. 101 a.

Da das Rechteck aus den äußeren Gliedern einer Proportion gleich dem Rechteck aus den inneren Gliedern ist, so folgt:

Lehrsatz 87. Zwei nicht parallele Sehnen eines Kreises teilen sich gegenseitig so, daß die Rechtecke aus ihren Abschnitten gleich sind.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Lehrsatz 88. Teilen sich zwei nicht parallele Strecken gegenseitig so, daß die Rechtecke aus ihren Abschnitten gleich sind, so liegen ihre Endpunkte auf einem Kreise.

Bew. Indirekt.

Fallen von den 4 Punkten zwei, etwa C und D zusammen, so geht die Sekante ED in die Tangente ET über, die Abschnitte EC und ED werden beide gleich ET und es entsteht die Proportion

$$EA : ET = ET : EB, \qquad \text{d. h.}$$

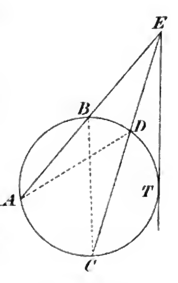


Fig. 101 b.

Lehrsatz 89. (Sekanten-Tangenten-Satz.) Gehen eine Tangente und eine Sekante von einem Punkte aus, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu den vom Ausgangspunkte aus gerechneten Abschnitten der Sekante.

Man gelangt zu einem von Lehrs. 87 unabhängigen Beweise, wenn man den Berührungspunkt T mit A und B verbindet und den Nachweis für die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ETB und EAT mit Benutzung des Sehnentangentenwinkels ETB führt.

Zusatz. Bei einem Kreise ist die Größe des Rechtecks aus den Abschnitten einer Sehne (Sekante) unabhängig von ihrer Richtung und wird lediglich durch die Lage des Teilpunktes (Ausgangspunktes) bestimmt.

Aufg. 1. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Aufl. Ist S der Schnittpunkt der Geraden G und der Verbindungslinie der Punkte A und B, und ist X der Punkt, in welchem die Gerade von dem gesuchten Kreise berührt wird, so folgt: $SX^2 = SA \cdot SB$. Der Punkt X ist demnach bekannt. Man kennt also zwei geometrische Örter für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. (Zwei Lösungen.)

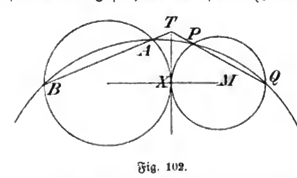


Fig. 102.

Aufg. 2. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Ist T der Schnittpunkt der Geraden AB (s. Fig. 102) und der gemeinschaftlichen Tangente und X der Berührungspunkt, so folgt: $TX^2 = TA \cdot TB$.

Legt man durch T eine beliebige Sekante PQ des gegebenen Kreises, so ist auch

$$TX^2 = TP \cdot TQ.$$

Daraus folgt aber:

$$TP \cdot TQ = TA \cdot TB,$$

d. h. die Punkte P und Q, von denen P beliebig auf dem gegebenen Kreise angenommen werden darf, liegen mit A und B auf einem Kreise. (Lehrs. 88.) Man kann also den Punkt T und damit auch den Berührungspunkt X bestimmen. (Zwei Lösungen.)

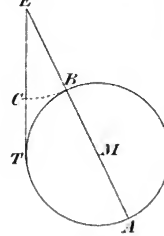


Fig. 103.

b) Der goldene Schnitt (die stetige Teilung).

Geht die Sekante (s. Lehrs. 89) durch den Mittelpunkt M und hat ET die Länge des Durchmessers AB (s. Fig. 103), so ist

$$ET^2 = EB \cdot (EB + AB) = EB \cdot (EB + ET)$$
$$= EB^2 + EB \cdot ET,$$

also $EB^2 = ET^2 - EB \cdot ET = ET \cdot (ET - EB)$.

Für $EC = EB$ und somit $ET - EB = CT$ ergibt sich hieraus: $EC^2 = ET \cdot CT$, d. h. die Tangente ET ist

in C so geteilt, daß der (größere) Abschnitt EC die mittlere Proportionale zu der ganzen Tangente ET und ihrem zweiten Abschnitt CT ist.

Erklärung. Eine Strecke heißt **stetig** oder nach dem **goldenen Schnitt** geteilt, wenn einer ihrer Abschnitte die mittlere Proportionale zu dem anderen Abschnitt und der ganzen Strecke ist.

Aufg. 3. Eine Strecke AB nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Ausführung. Man errichtet in B das Lot auf AB, gibt dem Lote die Länge AB, zeichnet den Kreis, der dies Lot zum Durchmesser hat, verbindet seinen Mittelpunkt mit A und trägt den außerhalb des Kreises liegenden Abschnitt der Verbindungslinie von A aus auf AB ab.

Aufg. 4. Die Abschnitte einer stetig geteilten Strecke a zu berechnen.

Aufl. Ist x der größere, also $a - x$ der kleinere Abschnitt, so hat man $x^2 = a(a - x)$ oder $x^2 + ax - a^2 = o$, und hieraus ergibt sich: $\mathbf{x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})}$. Der kleinere Abschnitt ist gleich $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Aufg. 5. Eine Strecke AB (a) außen durch den Punkt X so zu teilen, daß $BX^2 = AB \cdot AX$ ist.

Aufl. Wird die Teilstrecke BX mit x bezeichnet, so ist $AX = a + x$, und die Gleichung für x lautet: $x^2 = a(a + x)$ oder $x^2 - ax - a^2 = o$. Hieraus folgt: $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

In welchem Zusammenhang steht hiernach die Aufg. 5 mit der Aufg. 3 und wodurch allein unterscheiden sich die beiden Lösungen?

c) Sehnenviereck.

Wird in einem Sehnenviereck ABCD (s. Fig. 104) der Winkel BDC in D an AD angelegt, so entsteht ein Dreieck ADE, das mit dem Dreieck BDC in der Größe zweier Winkel übereinstimmt ($\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBC$!), während die Winkel des zweiten Dreiecks DEC gleich den Winkeln des Dreiecks ABD sind ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADE + \sphericalangle EDB = \sphericalangle CDB + \sphericalangle BDE = \sphericalangle CDE$!). Es ist daher $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ und $\triangle EDC \sim \triangle ADB$.

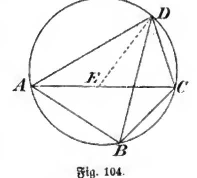


Fig. 104.

Daraus folgt aber:

1. $AD : AE = BD : BC$ oder $BD \cdot AE = AD \cdot BC$,
2. $AB : BD = CE : CD$ „ $BD \cdot CE = AB \cdot CD$,

und somit $BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, d. h.

Lehrsatz 90. (Satz des Ptolemäus.) Bei einem Sehnenviereck ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten.

Ist BD ein Durchmesser, so steht DE auf AC senkrecht, und die Proportion $AD : DE = BD : DC$ führt zu der Gleichung $AD \cdot DC = 2r \cdot DE$. Nun ist aber DE eine Höhe des Dreiecks ADC. Es besteht daher der Satz:

Lehrsatz 91. Bei einem Dreieck ist das Rechteck aus zwei Seiten gleich dem Rechteck aus der Höhe zur dritten Seite und dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises.

Folgerung. Da $J = \frac{1}{2} a h_a$ und $h_a \cdot 2r = b \cdot c$ ist, so folgt $\mathbf{J = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}}$ und $\mathbf{r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4J}}$.

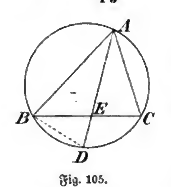


Fig. 105.

Ist schließlich (s. Fig. 105) AD die Halbierungslinie des Winkels BAC, so ist $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, also

$$AB : AE = AD : AC,$$

oder

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$
$$= AE^2 + AE \cdot ED.$$

Da aber $AE \cdot ED = BE \cdot CE$

ist, so folgt: $AB \cdot AC - BE \cdot CE = AE^2$, d. h.

Lehrsatz 92. Bei einem Dreieck ist das Quadrat über einer Winkelhalbierenden gleich der Differenz, welche man erhält, wenn man das Rechteck aus den beiden den Winkel einschließenden Seiten um das Rechteck aus den Abschnitten der dritten Seite vermindert.

Aufg. Aus den drei Seiten eines Dreiecks seine Winkelhalbierenden zu berechnen.

Aufl. Sind a_1 und a_2 die Abschnitte der Seite a, so ist nach Lehrs. 92 $w_\alpha^2 = b \cdot c - a_1 \cdot a_2$. Da aber nach Lehrs. 72 $a_1 : a_2 = b : c$ und somit $(a_1 + a_2) : a_1 : a_2 = (b + c) : b : c$

ist, so folgt:
$$a_1 = b \cdot \frac{a}{b+c}, \quad a_2 = c \cdot \frac{a}{b+c},$$

also:
$$b \cdot c - a_1 \cdot a_2 = b \cdot c - b \cdot c \cdot \frac{a^2}{(b+c)^2} = b \cdot c \left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} \right)$$

und somit:
$$w_\alpha^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b + c + a)(b + c - a).$$

Entsprechend lauten die Ausdrücke für w_β^2 und w_γ^2.

Kapitel 9.

Berechnung des Kreises.

Nr. 42. Die regelmäßigen Vielecke.

Erklärung. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn seine Seiten und auch seine Winkel untereinander gleich sind.

Lehrsatz 93. Jedes regelmäßige Vieleck besitzt einen umgeschriebenen und einen eingeschriebenen Kreis mit demselben Mittelpunkt.

Vor. Es sei (s. Fig. 106) $AB = BC = CD \ldots$
und $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D \ldots$

Beh. 1. A, B, C, D ... liegen auf einem Kreise.
2. AB, BC, CD ... sind Tangenten eines Kreises.

Bew. Wird M, der Schnittpunkt der Mittellote von AB und BC, mit den Ecken des Vielecks verbunden, so ist zunächst $MA = MB = MC$. Die gleichschenkligen Dreiecke MAB und MBC sind also kongruent und somit die 4 Winkel an den Grundlinien einander gleich. Daraus folgt, daß zunächst der Winkel B und dann auch A und C halbiert sind. Verbindet man daher M mit der Mitte C′ von CD, so ist $\triangle MCC' \cong \triangle MCB'$ (SWS.) und daher $\sphericalangle C' = \sphericalangle B' = R$, d. h. MC′ ist das Mittellot von CD. Hieraus ergibt sich $MD = MC$ und $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MCD = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} D$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich für alle weiteren Ecken des Vielecks, daß sie ebenso wie D auf dem durch A, B und C bestimmten Kreise liegen.

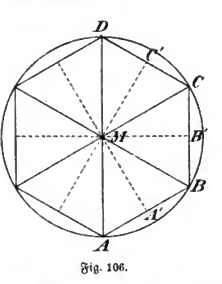


Fig. 106.

Da hiernach die Seiten des Vielecks gleiche Sehnen eines Kreises sind und somit gleichen Abstand von dessen Mittelpunkt besitzen, so sind sie Tangenten an den Kreis, der um M mit dem Abstand MA′ der Sehne AB beschrieben wird.

Folgerung 1. Der gemeinsame Mittelpunkt des ein- und umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Vielecks ist der Mittelpunkt des Vielecks.

Folgerung 2. Die zu den Seiten eines regelmäßigen Vielecks gehörigen Mittelpunktswinkel sind gleichgroß. Hat das Vieleck n Seiten, so ist jeder dieser Winkel gleich $\frac{4}{n} R$.

Lehrsatz 94. Teilt man einen Kreis in n gleiche Teile, so sind die Teilpunkte die Ecken eines regelmäßigen, dem Kreise eingeschriebenen und die Berührungspunkte eines regelmäßigen umgeschriebenen Vielecks.

Anl. z. Bew. (S. Fig. 107.) Da zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören, so sind alle durch Verbindung des Mittelpunktes mit den Ecken entstehenden gleichschenkligen Dreiecke kongruent. Hieraus kann die für den ersten Teil des Satzes noch erforderliche Gleichheit der Winkel an den Ecken bequem abgeleitet werden. Ferner ergibt sich daraus, daß diese Winkel sämtlich durch die Radien halbiert werden, daß also die Winkel zwischen den Tangenten in den Ecken und den Sehnen einander gleich sind. Hierauf stützt sich der Beweis dafür, daß auch das umgeschriebene Vieleck regelmäßig ist.

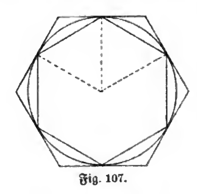


Fig. 107.

Zusatz 1. Auch die den Sehnen parallelen Tangenten bilden ein regelmäßiges, dem Kreise umgeschriebenes Vieleck.

Erklärung. Wird der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vielecks mit den Endpunkten einer Seite verbunden, so entsteht das **Bestimmungsdreieck** des Vielecks. Der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks heißt **Bestimmungswinkel** des Vielecks.

Folgerung. Der Bestimmungswinkel eines regelmäßigen n-Ecks ist gleich $\frac{360^0}{n}$.

Zusatz 2. Ein regelmäßiges Vieleck kann gezeichnet werden, wenn sein Bestimmungswinkel gezeichnet werden kann.

Zusatz 3. Aus dem regelmäßigen n-Eck leitet man das regelmäßige 2 n-Eck ab, indem man die Mittelpunktswinkel des n-Ecks halbiert und die neuen Teilpunkte des Kreises mit den Endpunkten der zugehörigen Seiten des n-Ecks verbindet bzw. durch die Teilpunkte Tangenten an den Kreis zieht.

Aufg. 1. Einem Kreise mit dem Halbmesser r ein **regelmäßiges Viereck** einzuschreiben und das Viereck zu berechnen.

Aufl. a) Der Bestimmungswinkel ist gleich 90^0. Zwei aufeinander senkrechte Durchmesser liefern daher die Ecken des gesuchten Vierecks.

b) Die Seite a_4 ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks mit den Katheten r. Es ist daher

$$a_4^2 = r^2 + r^2, \text{ und somit } \mathbf{a_4 = r\sqrt{2}}.$$

Für den Umfang u_4 ergibt sich hieraus: $\mathbf{u^4 = 4\,r\sqrt{2}}$.

Die Höhe ϱ_4 des Bestimmungsdreiecks ist gleich $\frac{1}{2}a_4$. Man erhält daher für den Inhalt J_4: $\mathbf{J_4 = 2\,r^2}$.

Aufg. 2. Einem Kreise mit dem Halbmesser r ein **regelmäßiges Sechseck** einzuschreiben und das Sechseck zu berechnen.

Aufl. (S. Fig. 108.) a) Der Bestimmungswinkel ist gleich 60°; das Bestimmungsdreieck ist daher gleichseitig und seine Seite gleich dem Halbmesser des Kreises. Wie ist demnach die Zeichnung auszuführen?

b) Zunächst ist nach a) $\mathbf{a_6 = r}$
und somit $\mathbf{u_6 = 6r.}$

Die Höhe ϱ^6 des Bestimmungsdreiecks ist gleich $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, und daher ergibt sich für den Inhalt J_6:

$$\mathbf{J_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.}$$

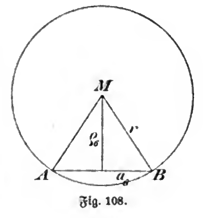


Fig. 108.

Aufg. 3. Einem Kreise mit dem Halbmesser r ein **regelmäßiges Zehneck** einzuschreiben und das Zehneck zu berechnen.

Aufl. (S. Fig. 109.) a) Der Bestimmungswinkel ist gleich 36°, also jeder Winkel an der Grundlinie des Bestimmungsdreiecks MAB gleich 72°. Halbiert man daher den Winkel A, so erhält man in ABC wiederum ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel 36° an der Spitze. Demnach ist $\triangle ABC \sim \triangle MAB$ (Lehrs. 75) und somit MB : AB = AB : BC. Da aber auch das Dreieck CAM gleichschenklig, also AB = MC ist, so ergibt sich die Proportion: MB : MC = MC : CB, d. h. der Radius MB ist in C nach dem **goldenen Schnitt** geteilt. (S. Nr. 41 b.)

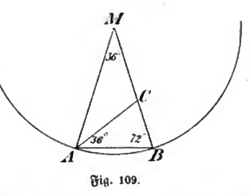


Fig. 109.

Teilt man daher einen Radius des Kreises nach dem goldenen Schnitt und trägt den größeren Abschnitt von einem beliebigen Punkte des Kreises beginnend 10 mal hintereinander als Sehne ein, so erhält man das gesuchte Zehneck.

b) Nach a) ist $r : a_{10} = a_{10} : (r - a_{10})$,

also $a_{10}^2 + r a_{10} - r^2 = 0$, und somit $\mathbf{a_{10} = \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5})}$.

Hieraus ergibt sich für den Umfang u_{10}: $\mathbf{u_{10} = 5r (-1 + \sqrt{5})}$.

Die Anwendung des Pyth. Lehrsatzes liefert für die Höhe des Bestimmungsdreiecks: $\varrho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, und daraus folgt für den Inhalt J_{10}:

$$\mathbf{J_{10} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.}$$

Aufg. 4. Einem Kreise mit dem Halbmesser r ein **regelmäßiges Fünfzehneck** einzuschreiben und die Seite des Fünfzehnecks zu berechnen.

Aufl. (S. Fig. 110.) a) Der Bestimmungswinkel ist gleich 24°, und da $24° = 60° - 36°$ ist, so erhält man eine Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks, wenn man von einem Punkte des Kreises aus in derselben Richtung die Seiten des regelmäßigen Sechsecks und Zehnecks als Sehnen einträgt und die Endpunkte miteinander verbindet.

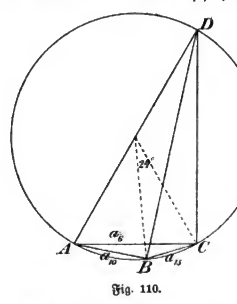


Fig. 110.

b) Zieht man den Durchmesser AD und die Sehnen DB und DC, so ist $DB = \sqrt{4r^2 - a_{10}^2}$, $DC = \sqrt{4r^2 - a_6^2}$, und daher nach dem Lehrsatz des Ptolemäus (s. Lehrs. 90)

$$a_{10}\sqrt{4r^2 - a_6^2} + a_{15} \cdot 2r = a_6\sqrt{4r^2 - a_{10}^2}.$$

Hieraus ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$a_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{8} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

Da nach dem Zusatz 3 zu Lehrs. 94 das regelmäßige 2n-Eck aus dem regelmäßigen n-Eck durch Halbierung der Mittelpunktswinkel abgeleitet wird, so kann hiernach gezeichnet werden

	das regelmäßige	mit dem Bestimmungswinkel
a)	4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck . . .	90°, 45°, $22\frac{1}{2}°$, $11\frac{1}{4}°$ . . .
b)	3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck . . .	120°, 60°, 30°, 15° . . .
c)	5-Eck, 10-Eck, 20-Eck, 40-Eck . . .	72°, 36°, 18°, 9° . . .
d)	15-Eck, 30-Eck, 60-Eck, 120-Eck . . .	24°, 12°, 6°, 3° . . .

Aufg. 5. Aus der Seite a_n eines regelmäßigen einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschriebenen n-Ecks die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen 2n-Ecks zu berechnen.

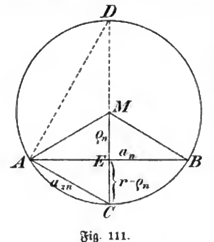


Fig. 111.

Aufl. (S. Fig. 111.) Ist MAB das Bestimmungsdreieck und ϱ_n der Abstand der Seite a_n von dem Mittelpunkt M, so ist die Projektion CE der Sehne a_{2n} (AC) auf den Durchmesser CD gleich $r - \varrho_n$. Nach Folgerung 1 zu Lehrs. 84 ist daher $a_{2n}^2 = 2r(r - \varrho_n)$, also $a_{2n} = \sqrt{2r(r - \varrho_n)}$. Für ϱ_n liefert der Pyth. Lehrsatz:

$$\varrho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n^2}.$$

Benutzt man die Ergebnisse b) der Aufgaben 1 und 2, so erhält man:

$$\varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} \text{ und } a_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$\varrho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ und } a_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3} \text{ und } a_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\varrho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ und } a_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

usw. Die Berechnung der Seiten a_8, a_{12}, a_{24}, . . . a_{16}, a_{32} . . . wird am bequemsten, wenn man die Formeln für ϱ_n und a_{2n} benutzt und Logarithmen verwendet.

Aufg. 6. Aus der Seite a_n eines regelmäßigen einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschriebenen n=Ecks die Seite b_n des regelmäßigen **umschriebenen** n=Ecks zu berechnen.

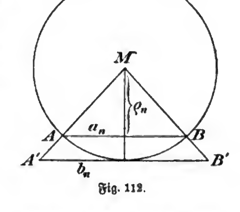


Fig. 112.

Aufl. (S. Fig. 112.) Die Bestimmungsdreiecke MAB und MA'B' der beiden n=Ecke sind ähnlich; und da ϱ_n und r die Höhen der beiden Dreiecke sind, so besteht die Proportion:

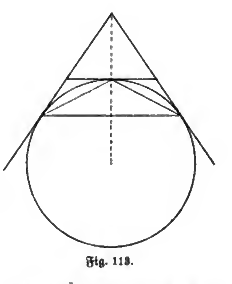
$$b_n : a_n = r : \varrho_n.$$

Hieraus aber folgt: $b_n = a_n \cdot \frac{r}{\varrho_n}$.

Nr. 43. Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts.

Wird ein eingeschriebenes 2n=Eck (s. Fig. 113) durch Halbierung der Mittelpunktswinkel aus einem eingeschriebenen n=Eck abgeleitet, so bildet jede Seite des n=Ecks mit je zwei Seiten des 2n=Ecks ein Dreieck und ist daher kleiner als deren Summe. Daraus folgt:

Der Umfang eines einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks nimmt zu, wenn die Seitenzahl verdoppelt wird.


Fig. 113.

Bei den umgeschriebenen Vielecken dagegen schneidet die neue Seite des 2n=Ecks von zwei Nachbarseiten des n=Ecks zwei Stücke ab und ist kleiner als deren Summe. Somit ergibt sich:

Der Umfang eines einem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks nimmt ab, wenn die Seitenzahl verdoppelt wird.

Bei fortgesetzter Verdoppelung der Seitenzahl schmiegen sich beide Arten von Vielecken immer enger an den Kreis, und da das umgeschriebene Vieleck einen größeren Umfang besitzt als das eingeschriebene mit gleicher Seitenzahl, so folgt:

a) Ein Kreis ist stets kleiner als der Umfang eines ihm umgeschriebenen und größer als der Umfang eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks.

b) Der Unterschied zwischen einem Kreise und den Umfängen der ihm ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit gleicher Seitenzahl wird um so kleiner, je größer die Seitenzahl angenommen wird.

Folgerung. Ein Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich (∞) großer Seitenzahl angesehen werden.

Zwei regelmäßige Vielecke mit gleicher Seitenzahl sind stets ähnlich, und ihre Umfänge verhalten sich wie die Halbmesser der um- oder eingeschriebenen Kreise. An dieser Beziehung wird durch fortgesetzte gleichmäßige Verdoppelung der Seitenzahl nichts geändert. Man kann daher auch zwei Kreise als ähnliche Figuren ansehen und das Verhältnis ihrer Umfänge (Längen) gleich dem Verhältnis ihrer Halbmesser setzen. Sind K und K′ die Umfänge zweier Kreise mit den Halbmessern r und r′, so folgt hieraus: $\frac{K}{K'} = \frac{r}{r'}$, also auch $\frac{K}{2r} = \frac{K'}{2r'}$, d. h.

Lehrsatz 95. Das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser hat bei allen Kreisen denselben Wert.

Erklärung. Der Wert des Verhältnisses, in welchem bei allen Kreisen der Umfang zu dem Durchmesser steht, wird mit π bezeichnet.

Folgerung 1. Ein Kreis mit dem Halbmesser r hat die Länge $2\pi r$.

Da Bogen und Mittelpunktswinkel die gleiche Maßzahl besitzen, so verhalten sich zwei Bogen wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel. Daraus folgt für den Bogen b_φ, der zu dem Mittelpunktswinkel φ gehört: $b_\varphi : 2\pi r = \varphi : 360^0$, also $\mathbf{b_\varphi = 2\pi r \cdot \frac{\varphi}{360}}$.

Denkt man sich die Kreisfläche durch Radien in unbegrenzt viele Teile zerlegt, so können diese als gleichschenklige Dreiecke mit der Höhe r angesehen werden. Da aber die Summe aller Grundlinien dieser Dreiecke gleich der Länge des Kreises ist, so ergibt sich für den Inhalt K der Kreisfläche: $K = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$, d. h.

Folgerung 2. Ein Kreis mit dem Halbmesser r hat den Inhalt πr^2.

Erklärung. Die Radien nach den Endpunkten eines Bogens begrenzen einen Teil der Kreisfläche, welcher Kreisausschnitt (Sektor) genannt wird. — Ein Bogen und die zu ihm gehörige Sehne begrenzen einen Teil der Kreisfläche, welcher Kreisabschnitt genannt wird.

Die angegebene Zerlegung der Kreisfläche in gleichschenklige Dreiecke führt zu dem Satze, daß zwei Kreisausschnitte eines Kreises sich verhalten wie die zugehörigen Bogen und damit wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel.

Daraus ergibt sich für den Ausschnitt A_φ, der zu dem Winkel φ gehört:

$$A_\varphi : \pi r^2 = b_\varphi : 2\pi r \quad \text{oder} \quad A_\varphi : \pi r^2 = \varphi : 360^0,$$

und somit ist

$$A_\varphi = \frac{1}{2} b_\varphi \cdot r \qquad \text{oder} \quad A_\varphi = \pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360}.$$

Der Inhalt des Kreisabschnitts ist die Differenz aus dem zugehörigen Kreisausschnitt und dem gleichschenkligen Dreieck, das durch die zugehörige Sehne und die Radien nach ihren Endpunkten gebildet wird. Die Berechnung des Kreisabschnittes ist daher mit den Hilfsmitteln der Planimetrie nur dann möglich, wenn diese Sehne bestimmt werden kann, d. h. wenn für die Abhängigkeit der Sehne und des zugehörigen Mittelpunktswinkels voneinander ein Gesetz aufgefunden ist, das die Berechnung des einen Stückes aus dem andern gestattet.

Die Berechnung eines Kreises mit dem Halbmesser r ist demnach möglich, wenn man die Zahl π kennt. Nun ist π nach Folgerung 1 die halbe Länge eines Kreises mit dem Halbmesser 1, und demnach gelangt man zu **Berechnung der Zahl π**, wenn man die halben Umfänge der diesem Kreise ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke für eine immer mehr zunehmende Seitenzahl bestimmt. Geht man dabei von dem regelmäßigen Sechseck aus, dessen Seite gleich 1 ist, so liefert die Rechnung für die halben Umfänge $\frac{1}{2}u$ und $\frac{1}{2}U$ der ein- bzw. umgeschriebenen Vielecke die folgende Tabelle:

Für n =	wird $\frac{1}{2}u$ =	und $\frac{1}{2}U$ =
6	3	3,4641016
12	3,1058285	3,2153903
24	3,1326286	3,1596599
48	3,1393502	3,1460862
96	3,1410320	3,1427146
192	3,1414525	3,1418731
384	3,1415576	3,1416628
768	3,1415839	3,1416102
1536	3,1415909	3,1415970

Somit ist nahezu $\pi = \mathbf{3{,}14159}$. Für weniger genaue Rechnungen genügen die Werte $\pi = \frac{22}{7}$ oder $\pi = \frac{355}{113}$.

Anmerkung. Der Wert $\frac{22}{7}$ für π wurde zuerst von Archimedes († 212 v. Chr.) gefunden. Ptolemäus (120 n. Chr.) setzte $\pi = \frac{377}{120} = 3{,}14166$. Metius (1550) fand für π das Verhältnis $\frac{355}{113}$. F. Vieta (1579) berechnete π auf 10 Dezimalstellen. Ludolph van Ceulen (1596) bestimmte für π 35 Dezimalstellen. Lambert (1761) wies zuerst nach, daß π eine irrationale Zahl ist.

Übungen.

Beweise die Sätze:

1. In zwei verschiedenen Kreisen verhalten sich die zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehörigen

a) Bogen wie die Halbmesser,

b) Kreisausschnitte wie die Quadrate der Halbmesser.

2. In zwei verschiedenen Kreisen verhalten sich die zu gleichen Bogen gehörigen Mittelpunktswinkel umgekehrt wie die Halbmesser.

3. In zwei verschiedenen Kreisen verhalten sich zwei Mittelpunktswinkel wie die Quotienten aus den zugehörigen Bogen und den Halbmessern.

4. Die Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks begrenzen mit dem über der Hypotenuse nach innen gezeichneten Halbkreis zwei mondförmige Figuren, deren Summe gleich dem Inhalt des Dreiecks ist (Lunulae Hippocratis).

5. Der Halbkreis über der Sehne eines Quadranten (Ausschnitts mit dem Winkel 90°) begrenzt mit dem Kreise eine mondförmige Figur, die gleich dem halben Quadrat des Halbmessers ist.

6. Die Summe aus den Inhalten der 4 Kreise, welche die 4 Abschnitte zweier sich rechtwinklig schneidenden Sehnen zu Durchmessern haben, ist gleich dem Inhalt des Kreises, in welchem die beiden Sehnen liegen.

7. Der von zwei Kreisen mit demselben Mittelpunkt gebildete Kreisring ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser eine den kleineren Kreis berührende Sehne des größeren ist.

Aufg. 1. Einen Kreis zu zeichnen, dessen

a) Umfang α) 2mal, β) 3mal, γ) 5mal so groß ist wie der Umfang,

b) Inhalt α) 2mal, β) 3mal, γ) 5mal so groß ist wie der Inhalt

eines Kreises mit dem Halbmesser r. (Benutze für r die Länge 6 cm!)

Aufg. 2. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen regelmäßigen Vieleck mit dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises ähnlich ist und dessen

a) Umfang α) 2mal, β) 5mal, γ) 7mal so groß ist wie der Umfang,

b) Inhalt α) 3mal, β) 5mal, γ) 8mal so groß ist wie der Inhalt

des gegebenen Vielecks. (Benutze ein Zehneck und für r die Länge 8 cm!)

Aufg. 3. Die Fläche eines gegebenen Kreises durch

a) einen Kreis mit demselben Mittelpunkt zu halbieren,

b) zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt in drei gleiche Teile zu teilen,

c) zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt in drei Teile zu teilen, die sich wie 2 zu 3 zu 4 verhalten. (Benutze für r die Länge 9 cm!)

Aufg. 4. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Inhalt zu dem Inhalt eines Kreises mit dem Halbmesser r (= 8 cm) sich verhält wie

a) 3 zu 4, b) 5 zu 4, c) 3 zu 5, d) 7 zu 6.

Aufg. 5. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Inhalt K zu den Inhalten K_1 und K_2 zweier Kreise mit den Halbmessern r_1 (= 8 cm) und r_2 (= 6 cm) in der Beziehung steht:

a) $K = K_1 + K_2$, b) $K = K_1 - K_2$, c) $K = K_1 + 2K_2$,

d) $K = 2K_1 + 3K_2$, e) $K = 3K_1 - 2K_2$, f) $K = \frac{2}{3}K_1 \pm \frac{3}{4}K_2$.

Nr. 44. Zusammenstellungen.

a) Darstellung algebraischer Ausdrücke.

1. $x = a + b$. (Vgl. Seite 5.)

2. $x = a - b$. (Vgl. Seite 5.)

3. $x = a \cdot n$, wo n eine natürliche Zahl ist. [$(n-1)$malige Wiederholung von 1.]

4. $x = \frac{a}{n}$, " " " " " " (Vgl. Seite 33.)

4a. $x = \frac{a+b+c}{n}$, " " " " " " (Nach 1, 2 und 4.)

4b. $x = \frac{ma \pm nb}{p}$, wo m, n und p natürliche Zahlen sind. (Nach 1–3 und 4.)

5. $x = a \cdot b$. (Vgl. Seite 51.)

6. $x = n \cdot a \cdot b$, wo n eine natürliche Zahl ist. (Nach 3 und 5.)

7. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Vgl. Seite 58.)

8. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. (Vgl. Seite 58.)

8a. $x = a\sqrt{n}$, wo n eine natürliche Zahl ist. (Nach 7 oder 8.)

8b. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (Zweimalige Verwendung von 7.)

8c. $x = \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2}$. (Wiederholte Verwendung von 7 oder 8.)

9. $x = \frac{a \cdot b}{c}$ (Vgl. Seite 55.)

9a. $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$. (Zeichne zuerst $y = \frac{a \cdot b}{d}$ und dann $x = \frac{y \cdot c}{e}$.)

10. $x = \sqrt{ab}$. (Vgl. Seite 72.)

10a. $x = a\sqrt{\frac{m}{n}}$. (Setze $x = \sqrt{a \cdot \frac{am}{n}}$, also nach 3, 4 und 10.)

10b. $x = \sqrt{ma^2 \pm nb^2}$. (Nach 6, 10 und 7 oder 8.)

b) Formeln zur Berechnung von Längen und Flächen.

1. Rechtwinkliges Dreieck: $c^2 = a^2 + b^2$, $h_c = \sqrt{p \cdot q}$, $J = \frac{a \cdot b}{2}$.

2. Gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

3. Gleichschenkliges Dreieck: $h_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $J = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

4. Allgemeines Dreieck: $J = \frac{a \cdot h_a}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot p_{cb}$,

$= b^2 + c^2 - 2c p_{bc}$.

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. (Nach Seite 59, Satz 2.)

$J = \varrho \cdot s = \varrho_a (s - a) = \varrho_b (s - b) = \varrho_c (s - c)$.

$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4J}$. (Vgl. Lehrs. 91.)

$w_\alpha^2 = \frac{b \cdot c}{(b+c)^2}(b + c + a)(b + c - a)$.

(Vgl. Lehrs. 92.)

5. Parallelogramm: $J = g \cdot h$.

6. Trapez: $J = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

7. Ähnliche Vielecke: $u_1 : u_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \ldots$

$J_1 : J_2 = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 \ldots$

8. Kreis: $U = 2\pi r$, $J = \pi r^2$,

$\pi = \frac{22}{7} = \frac{355}{133} = 3{,}1415926 \ldots$

arcus φ (Bogen zu φ) $= \frac{\varphi}{180} \cdot \pi r$.

A_φ (Ausschnitt zu φ) $= \frac{\varphi}{360} \cdot \pi r^2$.

9. Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c und d und den Diagonalen e und f:

$ac + bd = ef$. (Vgl. Lehrs. 90.)

10. Der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke a: $x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Abschnitt II.

Arithmetik.

Erster Teil.

Die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe.

Kapitel 1.

Die 4 Grundrechnungsarten.

Nr. 1. Begriff der Zahl. Bezeichnung der Zahlen.

Eine Mehrheit gleichartiger Dinge faßt man — indem man von den unterscheidenden Merkmalen absieht — durch eine benannte Zahl zu einem Begriff zusammen (z. B. 10 Bäume, 6 Schüler). Jedes der zusammengefaßten Dinge wird als Einheit bezeichnet.

Wird auf die Art der Einheiten keine Rücksicht genommen, so entsteht aus der benannten Zahl die unbenannte Zahl. Die Einheit der unbenannten Zahlen ist Eins oder der Einer.

Beginnt eine Reihe von Zahlen mit der Einheit Eins und geht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügung eines Einers hervor, so wird die Reihe als die Reihe der natürlichen (absoluten) Zahlen bezeichnet.

Zusatz. Die natürliche Zahlenreihe ist unbegrenzt.

Die Zeichen für die natürlichen Zahlen heißen Ziffern.

Man unterscheidet **römische** und **arabische** Ziffern. Damit die Anzahl der Ziffern nicht — der Zahlenreihe entsprechend — unbegrenzt groß zu sein braucht, wählt man bei den römischen Ziffern für gewisse Glieder der Zahlenreihe besondere Zeichen, wie V für fünf, X für zehn, C für hundert usw., und setzt aus diesen die Zahlen zusammen. Die Anwendung der arabischen Ziffern ermöglicht eine weit einfachere Schreibweise. Hier wird die Zahl, welche den Einer zehnmal enthält, als **Zehner**, die Zahl, die den Zehner zehnmal enthält, als **Hunderter** usw. bezeichnet und festgesetzt, daß eine Ziffer Einer, Zehner, Hunderter usw. bedeuten soll, je nachdem sie, von rechts nach links gerechnet, an der ersten, zweiten, dritten Stelle usw. steht. So besteht die Zahl 2875 aus 5 Einern, 7 Zehnern, 8 Hundertern und 2 Tausendern.

Fehlt in einer Zahl eine dieser Einheiten, so wird ihre Stelle ausgefüllt durch das Zeichen 0, das hiermit die Bedeutung einer Ziffer gewinnt.

Die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 reichen aus, um jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe zu bezeichnen.

Eine Ziffer bezeichnet stets eine bestimmte Zahl. Soll daher eine Zahl eine unbestimmte (beliebige) Anzahl von Einheiten enthalten, so muß eine andere Bezeichnung gewählt werden.

Erklärung 1. Unbestimmte Zahlen werden (gewöhnlich) durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet.

Zusatz. Im Verlaufe einer Rechnung muß ein Buchstabe stets dieselbe Zahl bedeuten.

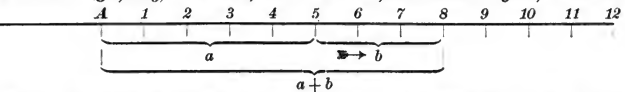
Erklärung 2. Die Lehre von den Zahlen und ihren Verbindungen wird **Arithmetik** genannt. Werden ihre Gesetze für allgemeine (unbestimmte) Zahlen aufgestellt, also durch Buchstaben ausgedrückt, so heißen sie **Formeln.**

Nr. 2. Die Addition.

Erklärung. Eine Zahl b zu einer (gleichbenannten) Zahl a addieren oder zuzählen heißt zu den Einheiten von a so viel Einheiten hinzufügen, als b enthält. Man schreibt die Aufgabe in der Form $a + b$ (gelesen a plus b) und bezeichnet sowohl $a + b$ als auch das Ergebnis der Addition als die Summe aus den Summanden (Gliedern) a und b.

Zusatz. Die Zahlenverbindung $a + b + c$ bezeichnet die Summe aus den Summanden $a + b$ und c.

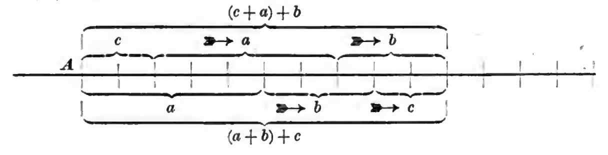
Man kann die Zahlenreihe dadurch darstellen, daß man auf einer Geraden von einem beliebig gewählten Punkte A (dem Anfangs- oder Nullpunkte der Zählung) aus nach einer Seite hintereinander gleiche Strecken



abmißt und jeden Endpunkt als das Bild der entsprechenden Zahl ansieht. Bei dieser Darstellung wird die Addition nach der Regel ausgeführt:

Man geht zur Bildung der Summe $a + b$ $(5 + 3)$ von dem Punkte, der die Zahl a (5) darstellt, um b (3) Teilstrecken nach rechts (weiter!).

Wird in gleicher Weise die Zahl c (2) zu der Summe $a + b$ addiert, so entsteht die Summe $a + b + c$.



Nun lehrt die Anschauung, daß derselbe Punkt erreicht wird, wenn sich die Reihenfolge der Summanden ändert, und führt damit auf das

Grundgesetz der Addition. Bei der Bildung einer Summe bleibt die Reihenfolge der Summanden ohne Einfluß.

$$(a + b) + c = (a + c) + b = (b + a) + c \text{ usw.*)}$$

Übungen. 1. Auf alle möglichen Arten $9 + 15 + 26$ zu berechnen.
2. Auf die bequemste Art $76 + 19 + 24$ zu berechnen.

Nr. 3. Die Subtraktion.

Erklärung. Von einer Zahl a eine kleinere (gleichbenannte) Zahl b subtrahieren oder abziehen heißt von den Einheiten der Zahl a so viel Einheiten wegnehmen, als b enthält. Man schreibt die Aufgabe in der Form $a - b$ (gelesen: a minus b) und bezeichnet sowohl $a - b$ als auch das Ergebnis der Subtraktion als die Differenz aus dem Minuendus a und dem Subtrahendus b.

Zusatz. Das Ergebnis der Subtraktion wird auch Rest genannt.

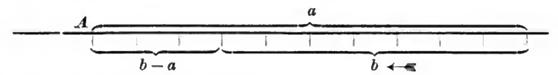
Addiert man zu der Differenz $a - b$ den Subtrahendus b, so erhält man den Minuendus. $\mathbf{(a - b) + b = a}$. Subtrahiert man von der Summe $a + b$ den Summanden b, so bleibt a als Rest. $\mathbf{(a + b) - b = a}$, d. h.

Folgerung 1. Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich auf.

Da nach dem Grundgesetz der Addition $(a - b) + b = b + (a - b)$ ist, so hat man auch $\mathbf{b + (a - b) = a}$, d. h.

Folgerung 2. Die Differenz ist die Zahl, die zum Subtrahendus addiert den Minuendus liefert.

Bei der geometrischen Darstellung der Differenz $a - b$



lautet die Regel für die Subtraktion:

Man geht bei der Bildung der Differenz $a - b$ $(8 - 5)$ von dem Punkte, der den Minuendus a (8) darstellt, um b (5) Teilstrecken nach links (zurück!).

Da die beiden Richtungen nach rechts und nach links entgegengesetzt sind, so folgt:

Addition und Subtraktion sind **entgegengesetzte** Rechnungsarten, oder die Subtraktion ist die **Umkehrung** der Addition.

---

*) Die Klammer wird hier benutzt, um anzuzeigen, daß die von ihr eingeschlossene Rechnung den anderen Rechnungen vorausgehen soll. Wie läßt sich diese Deutung mit der Erklärung der Klammer in Nr. 6 vereinigen?

Zusatz. Die Richtigkeit der Folgerungen 1 und 2 läßt sich bei der geometrischen Darstellung der Zahlenreihe bequem nachweisen.

Anmerkung. Addition und Subtraktion werden als **Rechnungsarten erster** (unterster) **Stufe** bezeichnet.

Übungen. 1. Welche Zahl muß man zu 46 (m — a) addieren, um 50 (m) zu erhalten?
2. Welche Zahl ist um 8 (b) kleiner als 35 (a)?
3. Wie groß ist x, wenn $x + 45 = 92$, oder $x - 27 = 18$ ist?

Nr. 4. Die Multiplikation.

Erklärung. Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplizieren heißt die Summe aus so viel Summanden a bilden, als b Einheiten enthält. Man schreibt die Aufgabe in der Form $a \cdot b$ (gelesen: a mal b) und bezeichnet sowohl $a \cdot b$ als auch das Ergebnis der Multiplikation als das Produkt aus dem Multiplikandus a und dem Multiplikator b.

Es ist also $\mathbf{a \cdot b = a + a + a + \cdots + a}$ (b Summanden).

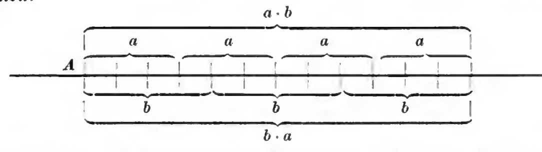
Zusatz. Ist der Multiplikator b gleich 0, so hat das Produkt den Wert 0.

Anmerkung 1. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreibt man statt $a \cdot b$ auch ab. Sind a und b natürliche Zahlen, so ist diese Abkürzung unzulässig. Weshalb? Wodurch unterscheiden sich 94 und $9 \cdot 4$?

Anmerkung 2. Die Zahl a kann eine benannte Zahl sein und das Produkt besitzt dann ihre Benennung. Ist dagegen auch b eine benannte Zahl, so hat das Produkt keine Bedeutung.*)

Zusatz. Die Zahlenverbindung $a \cdot b \cdot c$ bezeichnet das Produkt aus dem Multiplikandus $a \cdot b$ und dem Multiplikator c.

Bei der geometrischen Darstellung ergibt sich als Regel für die Multiplikation:



Man geht zur Bildung des Produktes $a \cdot b$ vom Anfangspunkte A der Zählung aus um so viel Schritte von der Länge a nach rechts, als b Einheiten enthält.

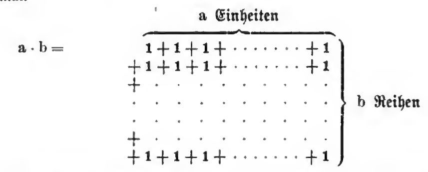
Nimmt man die dadurch gefundene Strecke als neue Schrittlänge, so entsteht das Produkt $a \cdot b \cdot c$, wenn man von A aus nach rechts so viel

*) Das Produkt zweier benannten Zahlen kann nur durch eine besondere Festsetzung eine Bedeutung erlangen. So versteht man z. B. unter dem Produkt zweier Strecken die Größe eines Rechtecks, dessen Seiten gleich den Strecken sind.

Schritte von dieser Länge macht, als c Einheiten enthält. Die Anschauung lehrt, daß man zu demselben Punkte gelangt, wenn man die Stellung der Größen a, b und c in dem Produkte $a \cdot b \cdot c$ verändert. Gibt man daher den Größen den gemeinschaftlichen Namen **Faktoren**, so führt die Anschauung auf das

Grundgesetz der Multiplikation. Bei der Bildung eines Produktes bleibt die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluß.

Anmerkung. Will man dies Gesetz als einen Lehrsatz beweisen, so stellt man zunächst das Produkt $a \cdot b$ als eine Summe dar. Da $a = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (a Einheiten) ist, so hat man



Wird diese Aufstellung so umgedreht, daß die nebeneinander stehenden Einheiten übereinander stehen, so stellt sie das Produkt $b \cdot a$ dar. Es ist also $b \cdot a = a \cdot b$. Damit ist der Satz für ein Produkt aus 2 Faktoren bewiesen. Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ entsteht nun durch Multiplikation des Ergebnisses von $(a \cdot b)$ mit c, und demnach ist auch $(a \cdot b) \cdot c = c \cdot (a \cdot b)$.

Ferner ist $a \cdot b \cdot c = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + \cdots + a \cdot b$ (c Summanden),
$= b \cdot a + b \cdot a + b \cdot a + \cdots + b \cdot a$ ("),
also $= (b \cdot a) \cdot c$
und $(b \cdot a) c$ wieder gleich $c \cdot (b \cdot a)$.

In entsprechender Weise kann man die übrigen durch Vertauschung entstehenden Formen des Produktes ableiten und damit zeigen, daß der Satz auch für ein Produkt aus 3 Faktoren richtig ist, usw.

Folgerung 1. Man multipliziert ein Produkt, indem man einen seiner Faktoren multipliziert.

Bew. Nach dem Grundgesetz der Multiplikation.

Folgerung 2. Man kann mit einem Produkt multiplizieren, indem man mit seinen Faktoren nacheinander multipliziert.

Folgerung 3. Man multipliziert Produkte miteinander, indem man ihre Faktoren in beliebiger Reihenfolge zu einem Produkte vereinigt.

Zusatz 1. Besteht ein Produkt aus einer natürlichen und einer allgemeinen Zahl, so wird die natürliche Zahl als **Koeffizient** bezeichnet und ohne Multiplikationszeichen vor die allgemeine Zahl gesetzt. So bedeutet 5a das Produkt $5 \cdot a$ oder $a \cdot 5$, d. h. das 5-fache der Zahl a.

Zusatz 2. Der Faktor 1 verändert den Wert eines Produktes nicht und kann daher nach Bedarf hinzugefügt werden.

Zusatz 3. Man schreibt $a \cdot a$ in der Form a^2 (gelesen: a hoch 2 oder a-Quadrat), $a \cdot a \cdot a$ in der Form a^3 (a hoch 3) usw. und bezeichnet a sowie die Produkte a^2, a^3 usw. als Potenzen von a.

Übungen. 1. $6 \cdot 7 \cdot 5$ auf die bequemste Art zu berechnen.
2. $7a \cdot 5$; $8x^2 \cdot x$; $4 \cdot 5a^2$; $2x \cdot x^3y$ zu berechnen.
3. $5ab \cdot 6ac$; $3a^3b^2 \cdot 7a^2b^3$ zu berechnen.
4. $4x^2y \cdot 3xy^2 \cdot 5x^3y^2$ zu berechnen.

Nr. 5. Die Division.

Erklärung. Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heißt die Zahl aufsuchen, die mit b multipliziert a liefert. Man schreibt die Aufgabe in der Form $a:b$ (gelesen: a dividiert durch b) und bezeichnet sowohl $a:b$ als auch das Ergebnis der Division als den Quotienten aus dem Dividendus a und dem Divisor b.

Zusätze. Sind a und b gleichbenannte Zahlen, so ist der Quotient eine unbenannte Zahl. Man nennt dann b ein Maß von a. — Ist b unbenannt, so hat der Quotient die Benennung von a und heißt der b^{te} Teil von a. Sind a und b verschieden benannte Zahlen, so hat der Quotient, von wenigen Fällen abgesehen, keine Bedeutung. — Der Divisor darf nicht gleich 0 sein.

Multipliziert man den Quotienten $a:b$ wieder mit dem Divisor b, so erhält man den Dividendus a; ebenso ist nach der Erklärung $(a \cdot b):b = a$, d. h.

Folgerung 1. Multiplikation und Division durch dieselbe Zahl heben sich auf.

Bei der geometrischen Darstellung ergibt sich als Regel für die Division:

Zur Bildung des Quotienten $a:b$ bestimmt man entweder, mit wieviel Schritten von der Länge b der Dividendus a erreicht worden ist, oder wie groß jeder der b Schritte ist, die von dem Dividendus a nach dem Nullpunkte zurückführen.

Hieraus folgt wiederum:

Multiplikation und Division sind **entgegengesetzte** Rechnungsarten, oder die Division ist die **Umkehrung** der Multiplikation.

Aus der Erklärung der Division folgen als erste Divisionsgesetze:

Folgerung 2. Man dividiert ein Produkt, indem man einen seiner Faktoren durch den Divisor dividiert.

Beh. Es ist $(a \cdot b):c = (a:c) \cdot b$ oder $= (b:c) \cdot a$.

Bew. Jede der drei Formen liefert nach Folg. 1 durch Multiplikation mit c das Produkt $a \cdot b$.

Folgerung 3. Man kann durch ein Produkt dividieren, indem man durch seine Faktoren nacheinander dividiert.

Beh. Es ist $a:(b \cdot c) = (a:b):c$ oder $= (a:c):b$.

Bew. Nach Folg. 1 liefert jede der drei Formen durch Multiplikation mit $b \cdot c$ das Produkt a.

Zusatz. Der Divisor 1 liefert den Dividendus als Quotienten.

Anmerkung. Multiplikation und Division werden als **Rechnungsarten zweiter Stufe** bezeichnet. (S. Nr. 3.)

Übungen. 1. Welche Zahl gibt mit b multipliziert 12b?
2. Welchen Wert hat der Quotient $25a^3 : a$?
3. Wie groß ist der Quotient $24a^2b^3 : 6ab$?
4. Welchen Wert hat x, wenn $9x = 45$ ist?
5. Welchen Wert hat x, wenn $7ax^2 = 28a$ ist?

Kapitel 2.

Verbindung der 4 Rechnungsarten.

Nr. 6. Mehrgliedrige Ausdrücke. Klammerausdrücke.

Werden zwei oder mehrere Zahlen, die auch Produkte und Quotienten sein können, durch Addition oder Subtraktion miteinander verbunden, so entsteht ein zwei- bzw. mehrgliedriger Ausdruck.

Für einen mehrgliedrigen Ausdruck, der weder Produkte noch Quotienten enthält, folgt aus den Additions- und Subtraktionsgesetzen:

Lehrsatz 1. Der Wert eines mehrgliedrigen Ausdrucks ist von der Reihenfolge seiner Glieder unabhängig, wenn diese nur ihr Rechenzeichen behalten.

So ist $a - b + c - d + e = a + c + e - b - d$.

Kommen in einem mehrgliedrigen Ausdruck Produkte oder Quotienten vor, so müssen diese vor der Ausführung der Addition bzw. Subtraktion berechnet werden.

So ist $100 - 8 \cdot 4 + 81 : 3 = 100 - 32 + 27 = 95$.

Soll mit einem mehrgliedrigen Ausdruck eine weitere Rechnung vorgenommen werden, so wird er in eine Klammer eingeschlossen. Eine Klammer ist das Zeichen dafür, daß der von ihr eingeschlossene Ausdruck als **eine** Zahlengröße betrachtet werden soll.

Soll auch die Verbindung von eingeklammerten Ausdrücken als eine Zahlengröße in die Rechnung eintreten, so ist sie gleichfalls in Klammern einzuschließen. Es empfiehlt sich jedoch, die neuen Klammern von den bereits vorhandenen durch ihre Form zu unterscheiden.

Z. B. $5a + 3b - (6a - 5b)$,
$(5a + 3b)\,4c - (6a - 5b)$,
$[(5a + 3b)\,4c - (6a - 5b) \cdot 5c] : 12ab$.

Übungen. 1. Welchen Wert hat $6a - 13a - 5a + 19a$?
2. " " " $24 - 18 : 3$?
3. " " " $(24 - 18) : 3$?
4. " " " $[(24 - 18) : 3 + 7] \cdot (25 - 8 \cdot 2)$?

Nr. 7. Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen.

Lehrsatz 2. Man addiert eine Summe, indem man die Summanden einzeln addiert. $\mathbf{m + (a + b) = m + a + b}$.

Bew. Hat man zuerst a zu m addiert, so hat man b zuwenig addiert, muß also noch b zu der Summe $m + a$ addieren.

Lehrsatz 3. Man subtrahiert eine Summe, indem man die Summanden einzeln subtrahiert. $\mathbf{m - (a + b) = m - a - b}$.

Bew. S. Bew. des Lehrs. 2.

Zusatz. Die beiden Sätze gelten für Summen aus beliebig vielen Summanden.

Lehrsatz 4. Man addiert eine Differenz, indem man den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert. $\mathbf{m + (a - b) = m + a - b}$.

Bew. Hat man zuerst a addiert, so hat man b zuviel addiert, muß also noch b von der Summe $m + a$ subtrahieren.

Lehrsatz 5. Man subtrahiert eine Differenz, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert. $\mathbf{m - (a - b) = m - a + b}$.

Bew. Hat man zuerst a von m subtrahiert, so hat man b zuviel subtrahiert, muß also noch b zu der Differenz $m - a$ addieren.

Jeder der 4 Lehrsätze ist umkehrbar, und die Umkehrung liefert die Formeln:

$$\mathbf{m + a + b = m + (a + b),}$$
$$\mathbf{m - a - b = m - (a + b),}$$
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{m + a - b = m + (a - b)}\\ \mathbf{m - a + b = m - (a - b)}\end{array}\right\}\mathbf{(a > b).}$$

Nr. 8. Erste Erweiterung des Zahlbegriffs. Negative Zahlen.

Ist bei der Subtraktionsaufgabe $a - b$ der Minuendus a kleiner als b, wie z. B. in $5 - 8$, so ist die Aufgabe zunächst nicht ausführbar. Führt man die Subtraktion durch, soweit sie möglich ist, indem man b in die Summe $a + c$ $(5 + 3)$ zerlegt und dann a (5) abzieht, so bleibt die Aufgabe übrig, noch c (3) Einheiten abzuziehen, ohne daß eine Zahl vorhanden wäre, von der abgezogen werden könnte.

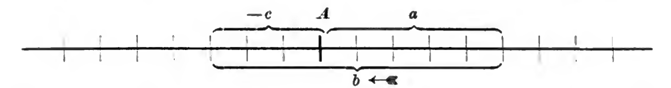
Man schreibt dies in der Form

$$a - b = - c \; (0 - c)$$

und weiß, daß diese Gleichheit zunächst nur die Bedeutung einer unausführbaren Subtraktionsaufgabe haben kann.

Geht man in entsprechender Weise von dem Punkte, der die Zahl a (5) darstellt, nach links, so sieht man, daß man nach Zurücklegung von a (5)

Teilstrecken bereits am Ausgangspunkte der Zählung angelangt ist. Die Forderung, b von a zu subtrahieren, ist also auch geometrisch nicht ausführbar,



wenn nicht die Grenze überschritten und die Punkte auf der linken Seite des Ausgangspunktes als Bilder einer neuen Zahlenreihe angenommen werden. Die Einheit dieser neuen Zahlenreihe ist nach links gerichtet und besitzt die bei der Subtraktion einzuschlagende Bewegungsrichtung, während die bisherige Einheit sich nach der Richtung erstreckt, in der die Addition vor sich geht. Die beiden Einheiten können daher durch die Rechenzeichen + und — voneinander unterschieden werden. Damit gewinnen diese Rechenzeichen auch die Bedeutung von Vorzeichen und geben die Art der in einer Zahl enthaltenen Einheiten an.

Anmerkung. Sollen innerhalb einer Rechnung die Zeichen + und — als Vorzeichen gelten, so werden sie mit ihren Zahlen in Klammern eingeschlossen.

Erklärung. Die Zahlen des neuen Zahlengebietes (mit dem Vorzeichen —) heißen **negative Zahlen.** Im Gegensatz dazu werden die bisherigen absoluten Zahlen als positive Zahlen bezeichnet. Positive und negative Zahlen heißen entgegengesetzte Zahlen.

Schulden sind negatives Vermögen. — Tiefe ist negative Höhe.

Zusatz 1. Positive und negative Zahlen heißen gemeinschaftlich **algebraische** Zahlen.

Zusatz 2. Die algebraische Zahlenreihe ist auf beiden Seiten unbegrenzt.

Die Vereinigung der negativen mit den positiven Zahlen ist gerechtfertigt, wenn die negativen Zahlen denselben Grundgesetzen (s. Nr. 2 u. 4) folgen, wie die positiven.

a) Zunächst enthält die Summe

$$(-a) + (-b)$$

die negative Einheit $(a + b)$-mal, und daher ist

1. $$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Ebenso ist $(-b) + (-a) = -(b + a) = -(a + b)$,
und somit ergibt sich: $(-a) + (-b) = (-b) + (-a)$,
d. h. das Grundgesetz der Addition gilt auch für negative Zahlen.

b) Das Produkt $(-a) \cdot b$ ist nach der Erklärung der Multiplikation gleich $(-a) + (-a) + (-a) + \cdots + (-a)$ (b Summanden) und enthält daher die negative Einheit $(a \cdot b)$-mal. Somit ist auch

2. $$(-\cdot a)b = -a \cdot b.$$

Aus dieser Gleichheit aber folgt nach der Erklärung der Division:

$$3. \quad (-ab) : (-a) = b$$
$$(-ab) : b = -a.$$

Für die Multiplikation **mit** negativen Zahlen ist eine Erweiterung des Multiplikationsbegriffs erforderlich.

Erklärung. Eine algebraische Zahl mit einer negativen Zahl multiplizieren heißt den Multiplikandus mit dem absoluten Werte des Multiplikators multiplizieren und dem Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen der algebraischen Zahl geben.

$$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b,$$
$$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b.$$

Folgerung 1. Es ist $(+a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (+a)$
und $(-a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (-a)$, d. h.
das Grundgesetz der Multiplikation gilt auch für negative Zahlen.

Folgerung 2. Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, und das Produkt zweier Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ.

Zusatz. Nach der Erklärung der Division gilt die entsprechende Folgerung für die Quotienten algebraischer Zahlen.

c) Der erste Summand $(-a)$ in der Gleichung 1 ist um $2a$ kleiner als $(+a)$, und demnach ist die Summe $(+a) + (-b)$ um $2a$ größer als $(-a) + (-b)$. Man hat daher $(+a) + (-b) = -(a+b) + 2a = 2a - (a+b)$, also

$$4. \quad (+a) + (-b) = a - b.$$

Ferner enthält die Differenz $(-a) - (-b)$ die negative Einheit $(a - b)$-mal, und demnach ist

$$5. \quad (-a) - (-b) = -(a - b).$$

Nun ist wieder $(-a) - (-b) + 2a = (+a) - (-b)$,
und somit $(+a) - (-b) = -(a - b) + 2a = 2a - (a - b)$, also

$$6. \quad (+a) - (-b) = a + b.$$

Die Formeln 4 und 6 führen zu dem Satze:

Lehrsatz 6. Die Addition einer negativen Zahl ist gleich der Subtraktion und die Subtraktion einer negativen Zahl gleich der Addition ihres absoluten Wertes.

Nr. 9. Addition und Subtraktion algebraischer Summen.

Jeder mehrgliedrige Ausdruck kann nach Lehrs. 6 als eine Summe aus positiven und negativen Gliedern angesehen und deshalb als algebraische Summe bezeichnet werden. Die Addition und Subtraktion mehrgliedriger

Ausdrücke läßt sich daher aus dem Zusatz zu den Lehrs. 2 u. 3 in Nr. 7 ableiten. Unter Beachtung des Lehrs. 6 erhält man dabei die Regeln:

Lehrsatz 7. a) Eine Klammer mit dem Vorzeichen + wird dadurch aufgelöst, daß die Klammer fortgelassen wird.

b) Eine Klammer mit dem Vorzeichen − wird dadurch aufgelöst, daß die Klammer fortgelassen und dabei die Vorzeichen ihrer Glieder umgekehrt werden.

Zusatz. Treten in einem Ausdruck verschiedenartige Klammern auf (s. Nr. 6), so können zuerst die äußeren und dann die inneren, oder zuerst die inneren und dann die äußeren Klammern aufgelöst werden.

Beispiel. $65a - [13a + (48a + 16b - 19c) - (12a - 10b + 26c)]$,
$= 65a - 13a - (48a + 16b - 19c) + (12a - 10b + 26c)$,
$= 65a - 13a - 48a - 16b + 19c + 12a - 10b + 26c$,
$= 16a - 26b + 45c$,

oder wenn man zuerst die inneren Klammern auflöst,
$= 65a - [13a + 48a + 16b - 19c - 12a + 10b - 26c]$,
$= 65a - 13a - 48a - 16b + 19c + 12a - 10b + 26c$.

Nr. 10. Multiplikation algebraischer Summen.

Lehrsatz 8. Man multipliziert eine algebraische Summe, indem man ihre Glieder einzeln multipliziert.

$$(a - b - c)f = a \cdot f - b \cdot f - c \cdot f.$$

Bew. Es ist $(a - b - c)f = \underbrace{(a - b - c) + (a - b - c) + \cdots + (a - b - c)}_{f \text{ Summanden}}$,

also $(a - b - c)f = a - b - c + a - b - c + \cdots + a - b - c$,
$= (a + a + a + \cdots a) - (b + b + b + \cdots b) - (c + c + c \cdots + c)$,
$= af - bf - cf$.

Ist der Multiplikator f ebenfalls eine algebraische Summe und $f = x - y + z$, so erhält man
$(a - b - c)(x - y + z) = a(x - y + z) - b(x - y + z) - c(x - y + z)$,
$= (x - y + z) \cdot a + (x - y + z) \cdot (-b) + (x - y + z) \cdot (-c)$,
$= ax - ay + az - bx + by - bz - cx + cy - cz$, d. h.

Lehrsatz 9. Man multipliziert zwei algebraische Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen multipliziert.

Zusatz. Die Vorzeichen der Teilprodukte werden nach der Folgerung 2 in Nr. 8, b bestimmt.

Anmerkung. Man kann dem Lehrs. 9 auch die Fassung geben: Man multipliziert zwei Klammern miteinander, indem man die Glieder der ersten Klammer der Reihe nach mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert.

Nr. 11. Wichtige Formeln.

Aus Lehrs. 9 ergeben sich einige häufig benutzbare Formeln, wenn die Faktoren besondere Formen annehmen.

a) Sind beide Faktoren gleich der Summe bzw. Differenz zweier Zahlen, so liefert die Multiplikation:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

und damit die Formeln:

1. $$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$
2. $$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

b) Bestehen die Faktoren aus Summe und Differenz zweier Zahlen, so erhält man

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2, \text{ also}$$

3. $$\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.}$$

In entsprechender Weise führt die Multiplikation zu den Formeln:

4. $$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$
5. $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
6. $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Übungen.

1. $(2a+5b)^2$; $(3a^2b+4ab^2)^2$; $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y\right)^2$.
2. $(7a-3b)^2$; $(5m-9)^2$; $(0{,}4a-0{,}5b)^2$.
3. $(5a+7b)(5a-7b)$; $(1\frac{1}{2}x^2y-2\frac{1}{3}xy^2)(1\frac{1}{2}x^2y+2\frac{1}{3}xy^2)$.
4. $47 \cdot 53$; (Es ist $47 = 50 - 3$ und $53 = 50 + 3$!) $88 \cdot 92$; $507 \cdot 493$; $4{,}89 \cdot 5{,}11$; $6\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{3}$.
5. $137^2 - 37^2$; [Es ist $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$!] $71^2 - 29^2$; $507^2 - 493^2$; $(7\frac{1}{3})^2 - (6\frac{2}{3})^2$.

Nr. 12. Division algebraischer Summen. Zerlegung in Faktoren.

Die Gesetze der Division entsprechen den Gesetzen der Multiplikation und werden aus diesen durch Umkehrung abgeleitet.

Lehrsatz 10. Man dividiert eine algebraische Summe, indem man jedes ihrer Glieder dividiert.

$$\mathbf{(a-b-c):q = a:q - b:q - c:q.}$$

Bew. Es ist $[(a-b-c):q]\,q = a - b - c$
und entsprechend $(a:q - b:q - c:q)\cdot q = a - b - c$.

Die Quotienten $a:q$, $b:q$ und $c:q$ haben nach der Erklärung der Division (s. Nr. 5) nur so lange eine Bedeutung, als q in a, b und c aufgeht. Ist aber $a = \alpha\cdot q$, $b = \beta\cdot q$ und $c = \gamma\cdot q$, so hat man $a - b - c = \alpha q - \beta q - \gamma q = (\alpha - \beta - \gamma)q$. Daraus folgt:

Folgerung. Besitzen die Glieder einer algebraischen Summe einen gemeinschaftlichen Faktor, so läßt die Summe sich in das Produkt aus diesem Faktor und der Summe der von ihm befreiten Glieder zerlegen.

Die Zerlegung in ein Produkt ist auch bei zahlreichen algebraischen Summen möglich, deren Glieder nicht sämtlich einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Hierzu gehören zunächst alle Ausdrücke, die sich auf eine der Formen

$$a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2,$$
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$ (s. Nr. 11) usw.

bringen lassen. Ferner kommt es häufig vor, daß die Glieder einer Summe in Gruppen zerlegt werden können, deren Verwandlung in ein Produkt möglich ist. Besitzen diese Gruppen dann einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann die ganze Summe als ein Produkt dargestellt werden.

Beispiel. Es ist $3a^2x^2 - 5a^2y^2 - 6bcx^2 + 10bcy^2$,
$= a^2(3x^2 - 5y^2) - 2bc(3x^2 - 5y^2)$,
$= (3x^2 - 5y^2)(a^2 - 2bc)$.

Auf den letzten Fall gelangt man bei einem dreigliedrigen Ausdruck, wenn sein mittelstes Glied sich so als Summe bzw. Differenz darstellen läßt, daß die dadurch entstehenden Glieder paarweis zusammengefaßt werden können.

Beispiel. Es ist $35x^2 - 3xy - 54y^2$
$= 35x^2 - 45xy + 42xy - 54y^2$,
$= 5x(7x - 9y) + 6y(7x - 9y)$,
$= (7x - 9y)(5x + 6y)$.

Weitere Beispiele dieser Art sind **1.** $x^2 - 16x + 63$. **2.** $a^2 + 3ab - 10b^2$. **3.** $a^4 + 0{,}2a^2b^2 - 0{,}15b^4$. **4.** $20a^2 + 17ab - 63b^2$. **5.** $0{,}06a^2 - 0{,}01ab + 0{,}12b^2$.

Zusatz. Läßt sich eine Zahl (ein Ausdruck) nicht als Produkt darstellen, so wird sie (er) als Primfaktor bezeichnet.

Nr. 13. Division algebraischer Summen durch algebraische Summen.

Das Verfahren bei der Division einer algebraischen Summe durch eine zweite wird aus der Bildungsweise des Produktes zweier algebraischen Summen abgeleitet. Das Produkt $(x - y + z)(a - b - c)$ sei der Dividendus und der Ausdruck $x - y + z$ der Divisor. Da

$$(x - y + z)(a - b - c) = (x - y + z) \cdot a - (x - y + z) \cdot b - (x - y + z) \cdot c$$

ist, so muß der Dividendus zunächst das Produkt $(x - y + z) \cdot a$ enthalten. Ist dies subtrahiert, so bleibt ein Rest, in dessen Gliedern nun zuerst das Produkt $-(x - y + z) \cdot b$ stecken muß. Die Subtraktion dieses Produktes liefert einen Rest, in dessen Gliedern wieder $-(x - y + z)c$ enthalten sein muß, usw. Hierauf gründet sich die

Divisionsregel. Sind Dividendus und Divisor in demselben Sinne geordnet (alphabetisch und nach steigenden bzw. fallenden Potenzen), so dividiert

man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors, multipliziert mit dem Quotienten den ganzen Divisor und zieht das Produkt von dem Dividendus ab. Alsdann dividiert man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors, multipliziert mit dem Quotienten den ganzen Divisor und zieht das Produkt wieder von dem Reste ab. Dies Verfahren setzt man fort, bis sämtliche Glieder des Dividendus benutzt sind.

Beispiel. $(18x^4 - 33x^3y + 32x^2y^2 - 9xy^3 - 8y^4) : (6x^2 - 7xy + 8y^2)$.

$$= 3\overset{a}{x^2} - 2\overset{b}{xy} - \overset{c}{y^2}.$$

Erstes Teilprodukt: $18x^4 - 21x^3y + 24x^2y^2$
$\quad - \quad + \quad -$

Erster Rest: $-12x^3y + 8x^2y^2 - 9xy^3 - 8y^4$
Zweites Teilprodukt: $-12x^3y + 14x^2y^2 - 16xy^3$
$\quad + \quad - \quad +$

Zweiter Rest: $-6x^2y^2 + 7xy^3 - 8y^4$
Drittes Teilprodukt: $-6x^2y^2 + 7xy^3 - 8y^4$
$\quad + \quad - \quad +$

Dritter Rest: 0

Nr. 14. Einfache Gleichungen.

Die bisher entwickelten Rechengesetze ermöglichen häufig die Bestimmung einer unbekannten Zahl x, wenn sie durch Verbindung mit bekannten Zahlen einen Ausdruck liefert, der entweder gleich einer bekannten Zahl oder gleich einem zweiten, aus x und bekannten Zahlen gebildeten Ausdruck ist. Weiß man z. B., daß

$$4x + 16 = 40$$

oder

$$5x - 13 = 27 - 3x$$

ist, so kann man die Sätze anwenden, daß

aus $a + b = c$ die Gleichheit $a = c - b$

und aus $a - b = c$ die Gleichheit $a = c + b$

folgt, und dadurch die Glieder mit x auf die eine und die von x freien Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringen. Es ergibt sich dann:

Aus	$4x + 16 = 40$	$5x - 13 = 27 - 3x$
folgt:	$4x = 40 - 16,$	$5x + 3x = 27 + 13,$
also:	$4x = 24,$	$8x = 40,$
und somit:	$x = 6.$	$x = 5.$

Die Vorschrift für die Auflösung derartiger Aufgaben (Gleichungen) lautet hiernach:

Regel. Man bringt die Glieder mit x auf die eine und die von x freien Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichens (ordnet die Gleichung), addiert dann die Glieder auf jeder der Seiten und berechnet schließlich x durch Division. Tritt beim Ordnen ein Glied von einer auf die andere Seite, so muß sein Vorzeichen umgekehrt werden.

Sind Glieder der Ausdrücke Produkte (oder auch Quotienten), so wird durch Ausführung der Multiplikation (bzw. Division) die Auflösung der Aufgabe auf einen der vorhergehenden Fälle zurückgeführt.

So folgt aus $(7x - 5) \cdot 8 = (4 - 3x) \cdot 2 + 76$
zunächst: $56x - 40 = 8 - 6x + 76,$
und hieraus: $56x + 6x = 8 + 76 + 40,$
oder $62x = 124,$
also: $x = 2.$

Ebenso folgt aus $2a(4x - 5a) - 2b(3x - 5a) = 3a(x + 8b) - 3b(x + 4b)$
zunächst: $8ax - 10a^2 - 6bx + 10ab = 3ax + 24ab - 3bx - 12b^2,$
und hieraus: $8ax - 6bx - 3ax + 3bx = 24ab - 12b^2 + 10a^2 - 10ab,$
oder $5ax - 3bx = 10a^2 + 14ab - 12b^2,$
also: $x(5a - 3b) = 10a^2 + 14ab - 12b^2,$
und somit: $x = (10a^2 + 14ab - 12b^2) : (5a - 3b) = 2a + 4b.$

$$\begin{array}{l} 10a^2 - 6ab \\ \underline{- \quad +} \\ \quad + 20ab - 12b^2 \\ \quad + 20ab - 12b^2 \\ \quad - \qquad + \end{array}$$

Anmerkung. Durch Anwendung dieses Verfahrens werden viele Aufgaben gelöst, die in Worten gegeben sind (Textgleichungen) und erst auf die Form einer Gleichung gebracht werden müssen.

Beispiel. In einer Kasse befinden sich 1930 ℳ und zwar 22 Kronen mehr als Doppelkronen und ebensoviel Fünfmarkstücke wie Kronen und Doppelkronen zusammen. Wieviel Doppelkronen sind in der Kasse?

Aufl. Bezeichnet x die Anzahl der Doppelkronen, so sind in der Kasse
x Doppelkronen, $x + 22$ Kronen, $2x + 22$ Fünfmarkstücke,
mit den Werten $20x$ ℳ, $(x + 22) \cdot 10$ ℳ, $(2x + 22) \cdot 5$ ℳ.
Demnach ist $20x + (x+22) \cdot 10 + (2x + 22) \cdot 5 = 1930,$
also: $20x + 10x + 220 + 10x + 110 = 1930,$
oder $20x + 10x + 10x = 1930 - 220 - 110,$
oder $40x = 1600,$
und somit: $x = 40.$

Kapitel 3.

Die Brüche und Proportionen.

Nr. 15. Zweite Erweiterung des Zahlbegriffs. Der Bruch.

Ist bei der Divisionsaufgabe $a : b$ der Divisor b nicht als Faktor in dem Dividendus a enthalten, so läßt sich der Wert des Quotienten nicht durch eine Zahl des bisherigen Zahlengebietes angeben. So liegt der Wert
des Quotienten $13 : 6$ zwischen 2 und 3,
„ „ $27 : 7$ „ 3 „ 4.

Soll es daher möglich sein, den Wert derartiger Quotienten anzugeben, so muß der Zahlbegriff erweitert werden. Man denkt sich zu dem Zwecke die Einheit in so viel gleiche Teile geteilt, als der Divisor Einheiten enthält, und führt einen dieser Teile als neue Zahleneinheit ein.

Erklärung. Das Zahlzeichen $\frac{1}{n}$ (gelesen: ein n^tel^ oder eins durch n) bezeichnet eine neue Zahleinheit, die durch Teilung von 1 in n gleiche Teile entsteht.

1 Pfennig ist $\frac{1}{100}$ einer Mark.

1 Pfennig ist $\frac{1}{300}$ eines Talers.

1 Stück ist $\frac{1}{15}$ einer Mandel.

1 mm ist $\frac{1}{10}$ eines cm, $\frac{1}{100}$ eines dm und $\frac{1}{1000}$ eines m.

Folgerung. Es ist $\frac{1}{n} \cdot n = 1$.

Zusatz 1. Jede der neuen Einheiten wird Bruch (Stammbruch) genannt. Im Gegensatz dazu heißen die bisherigen Zahlen ganze Zahlen.

Zusatz 2. Die Anzahl der neuen Einheiten ist unbegrenzt wie die Zahlenreihe.

Zusatz 3. Faßt man m Einheiten von der Größe $\frac{1}{n}$ zusammen, so entsteht die Bruchzahl oder kurz der Bruch $\frac{m}{n}$. Hierin wird m als Zähler und n als Nenner bezeichnet.

Folgerung 1. Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man seinen Zähler.

Bew. Nach Zusatz 3 ist
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m,$$
also
$$\frac{m}{n} \cdot n = \frac{1}{n} \cdot m \cdot n$$
$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m.$$

Folgerung 2. Sind Zähler und Nenner eines Bruches einander gleich, so hat der Bruch den Wert 1.

Folgerung 3. Der Wert des Quotienten $a : b$ ist gleich dem Bruch $\frac{a}{b}$, wenn b nicht in a aufgeht.

Zusatz 4. Ist der Zähler eines Bruches gleich 0, so ist der Bruch gleich 0 · —. Ist der Nenner eines Bruches gleich 0, so ist der Bruch unendlich groß (∞) · —. Ist der Nenner eines Bruches unendlich groß und der Zähler eine endliche Zahl, so ist der Bruch gleich 0 · —. Sind Zähler und Nenner eines Bruches gleich 0, so kann dieser jeden beliebigen Wert annehmen.

$$\frac{0}{a} = 0. \quad \frac{a}{0} = \infty. \quad \frac{a}{\infty} = 0. \quad \frac{0}{0} = a.$$

Zusatz 5. Der Nenner eines Bruches kennzeichnet die Art der Einheiten des Bruches. In diesem Sinne sind Brüche benannte Zahlen. Brüche heißen gleichnamig, wenn sie denselben Nenner, und ungleichnamig, wenn sie verschiedene Nenner haben.

Folgerung. Es kann mit Brüchen wie mit benannten Zahlen gerechnet werden.

Aufg. Nach Anleitung der in Nr. 5 entwickelten Vorstellung der Division den Zusammenhang zwischen den neuen und den bisherigen Zahleinheiten geometrisch nachzuweisen.

Nr. 16. Erweitern und Kürzen. Addition und Subtraktion von Brüchen.

Lehrsatz 11. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man seinen Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert (ihn **erweitert**). $\frac{a}{b} = \frac{af}{bf}$.

Bew. Teilt man die Einheit $\frac{1}{b}$ in f gleiche Teile, so entsteht die neue Einheit $\frac{1}{b \cdot f}$; von dieser sind f in einer Einheit $\frac{1}{b}$, also $a \cdot f$ in a Einheiten $\frac{1}{b}$ enthalten. Es ist daher $\frac{a}{b} = \frac{af}{bf}$.

Lehrsatz 12. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man seinen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert (ihn **kürzt**).

Bew. f Einheiten $\frac{1}{bf}$ bilden die Einheit $\frac{1}{b}$, $a \cdot f$ Einheiten $\frac{1}{bf}$ also den Bruch $\frac{a}{b}$.

Lehrsatz 13. Man addiert oder subtrahiert gleichnamige Brüche, indem man die Zähler addiert, bzw. subtrahiert und den Nenner unverändert läßt.

Bew. Die Brüche sind gleichbenannte Zahlen.

Zusatz. Brüche mit verschiedenen Nennern werden (mit Benutzung des Lehrs. 11) auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht und dann nach Lehrs. 13 addiert bzw. subtrahiert.

Erklärung. Als gemeinschaftlicher Nenner wird die kleinste Zahl gewählt, die alle in der Aufgabe vorkommenden Nenner als Faktoren enthält, und Hauptnenner genannt.

Zusatz. Der Quotient aus dem Hauptnenner und einem der gegebenen Nenner ist der zugehörige Erweiterungsfaktor.

Zur Bestimmung des Hauptnenners zerlegt man die einzelnen Nenner in ihre Primfaktoren, sucht von jedem der Primfaktoren die größte bei einer der Zerlegungen vorkommende Anzahl auf und vereinigt diese Faktoren zu einem Produkt.

Beispiel. Sind $4a^2b$, $6ab^2$, $9a^3b^2$ und $18ab^3$ die Nenner, so hat man

Zerlegung:	Hauptnenner:	Erweiterungsfaktoren:
$4a^2b = 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot b$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^3$	$9ab^2$
$6ab^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$	oder $36a^3b^3$	$6a^2b$
$9a^3b^2 = 3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^2$		$4b$
$18ab^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b^3$		$2a^2$.

Übungen.

1. $\frac{27a}{25x^2}$ auf den Nenner $75x^3y^3$ zu bringen.
2. $\frac{p+q}{a-b}$ „ „ „ a^2-b^2 „ „ .
3. Den Bruch $\frac{16x^4y}{24x^3y^5}$ zu kürzen.
4. „ „ $\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}$ „ „ .
5. Die Summe $\frac{r}{pq} - \frac{s}{pq} + \frac{t}{qr}$ zu bilden.
6. „ „ $\frac{2a-b}{a+b} - \frac{a-2b}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ zu bilden.
7. „ „ $\frac{4x^2-5y^2}{9x^2+12xy} + \frac{3x-2y}{3x+4y} - \frac{6x^2-y^2}{9xy+12y^2}$ zu bilden.

Nr. 17. Multiplikation und Division von Brüchen.

Lehrsatz 14. Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man seinen Zähler multipliziert und den Nenner unverändert läßt. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$.

Bew. Nach der Erklärung der Multiplikation und nach Lehrs. 13.

Zusatz. Besitzt die ganze Zahl mit dem Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so können diese vor der Multiplikation durch Kürzung entfernt werden.

Lehrsatz 15. Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert **oder** den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \cdot c}$.

Bew. Der erste Teil des Satzes folgt daraus, daß Brüche benannte Zahlen sind. Der zweite Teil ergibt sich aus demselben Grunde, wenn beachtet wird, daß $\frac{a}{b}$ zu $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ erweitert werden kann.

Zusatz. Besitzt die ganze Zahl mit dem Zähler gemeinschaftliche Faktoren, so können diese vor der Division durch Kürzung entfernt werden.

Für die Multiplikation **mit** einem Bruche ist eine Erweiterung des Multiplikationsbegriffs erforderlich.

Erklärung 1. Eine Zahl m mit einem Bruche $\frac{a}{b}$ multiplizieren heißt den b^{ten} Teil von m mit a multiplizieren. $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{b} \cdot a$.

Lehrsatz 16. Man multipliziert mit einem Bruche, indem man mit dem Zähler multipliziert und das Produkt durch den Nenner dividiert. $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{b}$.

Bew. Der Bew. folgt aus der Erklärung nach Lehrs. 14.

Folgerung. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Zusatz. Besitzt einer der Zähler mit dem nicht zu ihm gehörigen Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so können diese vor der Multiplikation durch Kürzung entfernt werden.

Erklärung 2. Zwei Zahlen heißen reziprok zueinander, wenn ihr Produkt gleich 1 ist.

Es sind also a und $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ reziproke Zahlen.

Lehrsatz 17. Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seiner reziproken Zahl (den Bruch umkehrt und) multipliziert.

$$m : \frac{a}{b} = m \cdot \frac{b}{a} = \frac{m \cdot b}{a}.$$

Bew. Durch Multiplikation mit $\frac{a}{b}$ erhält man m.

Folgerung. Es ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Anhang zu Nr. 16 und Nr. 17.
Dezimalzahlen und Dezimalbrüche.

a) Die Zahleinheiten Zehner, Hunderter, Tausender usw. sind aus dem Einer durch fortgesetzte Multiplikation mit 10 entstanden. Umgekehrt gelangt man von einer höheren Einheit zur nächst-niederen, wenn man durch 10 dividiert. Da nach Einführung der Brüche kein Grund mehr vorliegt, bei dem Einer Halt zu machen, so entstehen durch die Fortsetzung der Division neue (Bruch-) Einheiten, die als Brüche geschrieben werden müßten. Wählt man aber zur Kennzeichnung der Einerstelle ein hinter dieser stehendes Komma und setzt fest, daß die n^{te} Stelle hinter den Einern in gleicher Weise durch Division entstanden sein soll, wie die n^{te} Stelle vor den Einern durch Multiplikation mit $10n$ entstanden ist, so lassen sich die neuen Einheiten den bisherigen Einheiten angliedern, ohne daß die Bruchform gewählt wird.

So enthält die Zahl 6,587 die Brüche $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{100}$ und $\frac{7}{1000}$ und würde die Bruchform $6\frac{587}{1000}$ besitzen.

Damit werden diese Brucheinheiten auch äußerlich zu Einheiten des dekadischen Zahlensystems gemacht. Zum Unterschied von den bisherigen werden sie als **dezimale** Einheiten bezeichnet.

Eine Zahl, die nur eine endliche Anzahl der dezimalen Einheiten enthält, wird **Dezimalzahl** genannt. Enthält dagegen eine Zahl eine unbegrenzte Anzahl von dezimalen Einheiten, deren Ziffern sich periodisch wiederholen oder

regellos aufeinander folgen, so ist die Zahl auch durch die neuen Einheiten nicht ganzzahlig*) ausdrückbar und wird deshalb als **Dezimalbruch** bezeichnet.

b) Die Angliederung der dezimalen Einheiten ruft bei den Rechengesetzen keine Änderung hervor. Bei der **Addition** und **Subtraktion** werden auch die Dezimalzahlen so untereinander geschrieben, daß die Einer übereinander stehen, und im Resultat stehen die Einer wieder unter den Einern.

Z. B.

```
    24,79          225,49
 + 143,253       –  68,7253
 +  71,5         ----------
 ---------        156,7647.
   239,543.
```

Bei der **Multiplikation** ist die Stellung des Teilproduktes ganz wie bei der Multiplikation mit ganzen Zahlen von dem Stellenwert des jedesmaligen Multiplikators abhängig. Es empfiehlt sich jedoch der rascheren Übersicht wegen, durch Division und entsprechende Multiplikation mit einer Potenz von 10 dafür zu sorgen, daß die zweite Zahl als höchste Stelle die Einerstelle besitzt, und dann bei der Multiplikation von links nach rechts zu gehen.

Beispiel. 34,17 · 26,85 oder 341,7 · 2,685

```
683 4
205 02
 27 336
  1 7085
---------
917,4645.
```

Hieran schließt sich dann bequem die **abgekürzte Multiplikation** an. Bei der Bildung des ersten Teilproduktes beginnt man mit der Ziffer des Multiplikandus, die eine Stelle weiter nach rechts steht, als es die vorgeschriebene Genauigkeit verlangt, und läßt bei jeder folgenden Multiplikation der Reihe nach eine der vorstehenden Stellen aus.

Beispiel. 28'3,54 37 · 0,8'2574 (t)

```
226 8 34|4
  5 6 70|8
  1 4 17|5
    1 98|1
      11|2
---------
234,1 32
```

Bei diesem Verfahren beträgt die Ungenauigkeit weniger als die Hälfte einer Einheit der letzten Stelle.

Verschiebt man in entsprechender Weise das Komma bei der **Division** (gleichzeitig nach derselben Seite!), so läßt sich leicht angeben, wieviel Stellen im Quotienten vor dem Komma stehen. Bei der Rechnung braucht dann auf das Komma keine Rücksicht mehr genommen zu werden.

Hieran schließt sich bequem die **abgekürzte Division** an. Man bestimmt für den Quotienten die Stellung des Kommas und benutzt zur ersten Division von dem Divisor eine Stelle mehr, als der Quotient bei der verlangten Genauigkeit besitzen soll. Bei jeder folgenden Division wird dann der Divisor um eine weitere Stelle verkürzt.

---

*) Die irrationalen Zahlen (s. Nr. 25) sind auch nicht durch Brüche der neuen Einheiten ausdrückbar.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} \underline{1'4,673|2} : 9'8,57|2\ (t) = 0,148\ldots \\ \quad \underline{4\,816} \\ \qquad \underline{876} \\ \qquad\ 92 \end{array}$$

Der Rest ist größer als die Hälfte von 98, die letzte Stelle ist also um 1 zu erhöhen, und der Quotient beträgt 0,149.

Die Genauigkeit ist dieselbe wie bei der Multiplikation.

c) Die Verwandtschaft der dezimalen Zahlen mit den Brüchen tritt auch dadurch hervor, daß jede der beiden Zahlenarten in die andere umgewandelt werden kann. So ergibt sich durch Ausführung der Division

$$\frac{5}{8} = 0{,}625; \quad \frac{19}{71} = 0{,}2638888\ldots\ldots.$$

Enthält der Nenner weiter keine Faktoren als 2 und 5, so geht die Division auf, und es entsteht eine Dezimalzahl. In allen anderen Fällen liefert die Division einen periodischen Dezimalbruch, dessen Periode gleich nach dem Komma beginnt (**rein-periodisch!**), wenn der Nenner keinen der Faktoren 2 und 5 besitzt, und erst später anfängt (**vor-periodisch!**), wenn auch diese Faktoren im Nenner vorkommen.

Die Umwandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch ist einfach. Man gibt der Zahl als Nenner die n^{te} Potenz von 10, wenn n Dezimalstellen vorhanden sind, und sucht dann den Bruch zu kürzen.

So ist
$$0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}.$$

Ebenso einfach ist die Umwandlung eines nicht-periodischen Dezimalbruchs in einen Bruch, der seinem Werte beliebig nahe kommt.

So ist $0{,}573479\ldots. = \frac{573}{1000}$ bei einer Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$.

Der Weg, auf dem ein periodischer Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch umgewandelt werden kann, wird durch folgende Überlegung gefunden: Bezeichnet man den zu ermittelnden Bruch mit x, so lassen sich zwei Gleichungen zwischen x und dem Dezimalbruch aufstellen und durch Subtraktion die sämtlichen Perioden bis auf die erste beseitigen.

Ist $x = 0{,}727272\ldots$
so hat man $x = 0{,}7272\ldots$
und $\underline{100\,x = 72{,}7272\ldots}$
also $99\,x = 72$
und $x = \frac{72}{99}.$

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2638484\ldots \\ 1000\,x &= 263{,}8484\ldots \\ 100000\,x &= 26384{,}8484\ldots \\ \hline 99000\,x &= 26384 - 263 \\ x &= \frac{26384 - 263}{99000}. \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die **Regeln:**

1. Man verwandelt einen rein-periodischen Dezimalbruch in einen Bruch, indem man seiner Periode einen Nenner aus soviel Ziffern 9 gibt, wie die Periode Stellen hat.

2. Man verwandelt einen vor-periodischen Dezimalbruch in einen Bruch, indem man die Zahl bis zum Ende der ersten Periode um die Zahl zwischen dem Komma und der ersten Periode vermindert und der Differenz einen Nenner gibt, der mit ebensoviel Ziffern 9 beginnt, wie die Periode Stellen hat, und mit ebensoviel Ziffern 0 endet, wie Zwischenstellen vorhanden sind.

Nr. 18. Verhältnis zweier Zahlen. Proportion zwischen vier Zahlen.

Erklärung 1. Das Verhältnis zweier gleichbenannten Zahlen a und b ($a:b$, gelesen: a zu b) ist die Zahl, welche angibt, wie oft b in a enthalten ist. Die Zahlen a und b heißen Glieder und der Quotient $m = \frac{a}{b}$ heißt Wert des Verhältnisses.

Folgerung. Der Wert eines Verhältnisses ändert sich nicht, wenn man seine Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Zusatz. Ist b ein Maß von a, so ist m eine ganze Zahl. Ist der q^{te} Teil von b in a p-mal enthalten, so ist m gleich dem Bruch $\frac{p}{q}$.*)

Folgerung. Der Wert eines Verhältnisses ist von der Benennung der Glieder unabhängig und eine unbenannte positive Zahl.

Erklärung 2. Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen wird Proportion genannt. $\mathbf{a : b = c : d}$ (gelesen: es verhält sich a zu b wie c zu d).

Zusatz 1. Schreibt man die Verhältnisse in Bruchform, so ergibt sich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Die Behandlung der Proportionen schließt sich daher eng an die Behandlung der Brüche an.

Zusatz 2. Werden mehr als zwei gleiche Verhältnisse durch Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht eine laufende Proportion. $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma \ldots$

Zusatz 3. In der Proportion $a : b = c : d$ heißen
a und c Vorderglieder, b und d Hinterglieder,
a und d Außenglieder, b und c Innenglieder.

Zusatz 4. Enthält eine Proportion benannte Größen, so kann die Benennung fortgelassen werden. Bei der Ableitung der Sätze über Proportionen darf man daher die Glieder wie absolute Zahlen behandeln.

Nr. 19. Sätze über Proportionen.

Lehrsatz 18. In einer Proportion ist das Produkt aus den Außengliedern gleich dem Produkt aus den Innengliedern.

Ist $a : b = c : d$, so ist $a \cdot d = b \cdot c$.

Bew. Aus $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt: $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$, also $a \cdot d = b \cdot c$.

Zusatz. Die Umkehrung des Lehrs. 18 kann durch Division aus $a \cdot d = b \cdot c$ abgeleitet werden. Da aber die Faktoren eines Produktes und ebenso

*) Der Fall, daß a und b inkommensurabel sind, bleibt hier noch unbesprochen.

die Seiten einer Gleichung miteinander vertauscht werden dürfen, so ergeben sich die folgenden 8 Proportionen:

1. $\mathbf{a:b=c:d}$ (Man dividiert in $ad=bc$ durch bd),
2. $\mathbf{a:c=b:d}$ (" " " $ad=bc$ " cd),
3. $\mathbf{b:a=d:c}$ (" " " $bc=ad$ " ac),
4. $\mathbf{b:d=a:c}$ (" " " $bc=ad$ " cd),
5. $\mathbf{c:a=d:b}$ (" " " $bc=ad$ " ab),
6. $\mathbf{c:d=a:b}$ (" " " $bc=ad$ " bd),
7. $\mathbf{d:b=c:a}$ (" " " $ad=bc$ " ab),
8. $\mathbf{d:c=b:a}$ (" " " $ad=bc$ " ac).

Folgerung 1. Eine Proportion bleibt richtig,

a) wenn ihre Außenglieder miteinander vertauscht werden;
b) wenn ihre Innenglieder miteinander vertauscht werden;
c) wenn ihre beiden Seiten miteinander vertauscht werden;
d) wenn die Proportion rückwärts gelesen wird.

Zusatz zu Folgerung 1, b. Die laufende Proportion $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$ kann auch in der Form $a:b:c = \alpha:\beta:\gamma$ geschrieben werden.

Folgerung 2. In einer Proportion können die beiden Vorderglieder sowie die beiden Hinterglieder mit demselben Faktor multipliziert werden.

Folgerung 3. Jedes der vier Glieder einer Proportion ist durch die drei anderen eindeutig bestimmt.

$$a = \frac{bc}{d},\ b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b},\ d = \frac{bc}{a}.$$

Folgerung 4. Stimmen zwei Proportionen in drei entsprechenden Gliedern überein, so stimmen sie auch in den vierten Gliedern überein. Ist $a:b=c:d$ und $a:b=c:x$, so ist $x=d$.

Lehrsatz 19. Gesetz der korrespondierenden Addition. In einer Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zu der Summe, bzw. Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ist $\mathbf{a:b=c:d}$, so ist auch $\mathbf{(a \pm c):(b \pm d) = a:b = c:d}$.

Bew. Aus $a:b=c:d$ folgt: $a:c=b:d$,

und hieraus	$\frac{a}{c} \pm 1 = \frac{b}{d} \pm 1$,	$1 \pm \frac{c}{a} = 1 \pm \frac{d}{b}$,
also	$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$	$\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b}$
oder	$(a \pm c):c = (b \pm d):d$,	$(a \pm c):a = (b \pm d):b$,

und somit durch Vertauschung der Innenglieder:

$$(a \pm c):(b \pm d) = a:b = c:d.$$

Zusatz. In entsprechender Weise ergeben sich die Proportionen:

$$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d.$$

Folgerung. Aus $a : b = c : d$ folgen die Proportionen:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d),$$
$$(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d).$$

Lehrsatz 20. In einer laufenden Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zu der Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ist $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$, so ist auch $(a + b + c) : (\alpha + \beta + \gamma) = a : \alpha$.

Bew. Zunächst ist nach Lehrs. 19 $(a + b) : (\alpha + \beta) = a : \alpha$, also auch $(a + b) : (\alpha + \beta) = c : \gamma$. Nach demselben Lehrsatz ist jetzt

$$(a + b + c) : (\alpha + \beta + \gamma) = c : \gamma \; (= a : \alpha).$$

Zusatz. Aus $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$ folgt: $(a \pm b) : (\alpha \pm \beta) = c : \gamma$.

Lehrsatz 21. Die Produkte aus den entsprechenden Gliedern zweier Proportionen sind die Glieder einer dritten Proportion.

Ist $\mathbf{a : b = c : d}$
und $\boldsymbol{\alpha : \beta = \gamma : \delta}$,
so ist auch $\boldsymbol{a \cdot \alpha : b \cdot \beta = c \cdot \gamma : d \cdot \delta}$.

Bew. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ folgt: $\frac{a \cdot \alpha}{b \cdot \beta} = \frac{c \cdot \gamma}{d \cdot \delta}$.

Folgerung. Aus $a : b = c : d$ folgt: $\mathbf{a^2 : b^2 = c^2 : d^2}$.

Bew. Nach Lehrs. 21 für $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ und $\delta = d$.

Zusatz. Aus $a : b = c : d$ folgt auch: $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Übungen.

1. Die Richtigkeit der Proportionen nachzuweisen:

$$5\tfrac{1}{4} : 3\tfrac{1}{3} = 2\tfrac{4}{5} : 1\tfrac{7}{9};$$
$$1{,}96 : 0{,}81 = 1{,}568 : 0{,}648;$$
$$(14a^2 + 23ab + 3b^2) : (4a^2 - 9b^2) = (28a^2 - 31ab - 5b^2) : (8a^2 - 22ab + 15b^2).$$

2. Aus der Proportion $32 : 48 = 12 : x$ den Wert von x zu bestimmen.

3. Aus der Proportion $(14a^2 + 17ab - 6b^2) : x = (6a^2 + ab - 12b^2) : (3a^2 - 7ab + 4b^2)$ den Wert von x zu bestimmen.

4. Die Proportion $(27 - 6x) : 3x = (36 - 10y) : 5y$ auf die einfachste Form zu bringen.

Kapitel 4.

Die Gleichungen ersten Grades.

Nr. 20. Begriff der Gleichung.

Erklärung 1. Ein arithmetischer Ausdruck, in dessen Bestandteilen veränderliche Größen vorkommen, wird als **Funktion** dieser Größen bezeichnet.

So sind $6x,\ 4x^3-7,\ \frac{2x^2-5}{9x}$ Funktionen von x,

$2x+3y,\ (7x^2-2xy)\cdot 5$ „ „ x und y.

Für bestimmte Werte der Veränderlichen nehmen auch die Funktionen bestimmte Werte an.

So wird $\frac{2x^2-5}{9x}$ für $x=1$ gleich $-\frac{1}{3}$, für $x=2$ gleich $+\frac{1}{6}$, usw.

und $(7x^2-2xy)\cdot 5$ für $x=1$ und $y=1$ gleich 25,
„ „ $x=2$ „ $y=1$ „ 120,
„ „ $x=2$ „ $y=2$ „ 100 usw.

Anmerkung 1. Eine Ausnahme machen die Fälle, in denen eine Funktion für gewisse Werte der Veränderlichen die Form $\frac{0}{0}$ oder $0\cdot\frac{1}{0}$ annimmt.

Anmerkung 2. Ist eine Funktion nur von einer Veränderlichen abhängig und tritt diese nur im ersten Grade auf ($f(x)=ax+b$), so läßt sich der Verlauf der Funktion bequem geometrisch darstellen. Man trägt auf einer (wagerechten) Geraden von einem beliebig gewählten Anfangspunkte aus die Werte ab, die man der Veränderlichen x beilegt, errichtet in den Endpunkten der abgetragenen Strecken Lote auf der Geraden und trägt auf diesen die Werte ab, welche die Funktion für die betreffenden Werte von x annimmt, und zwar die positiven nach oben und die negativen nach unten. Verbindet man nun die Endpunkte der Lote miteinander, so erkennt man, daß sämtliche Endpunkte auf einer Geraden liegen, daß also das Bild einer Funktion ersten Grades mit einer Veränderlichen eine gerade Linie ist.

Aufg. 1. Zeichne das geometrische Bild der Funktion
a) $f(x)=3x+2$, b) $f(x)=4x-5$, c) $f(x)=\frac{2}{3}x+1$!

Aufg. 2. Bestimme in den Fällen a—c mit Benutzung des geometrischen Bildes den Wert der Funktion für $x=6$ und prüfe durch Einsetzen die Richtigkeit des Ergebnisses!

Umgekehrt läßt sich die Frage aufwerfen, welche Werte der bzw. den Veränderlichen zu geben sind, damit die Funktion einen bestimmten Wert erhält.

Erklärung 2. Die Behauptung, daß eine Funktion einen bestimmten Wert oder mit einer zweiten Funktion den gleichen Wert hat, wird **Gleichung** genannt.

So ist $\frac{2x^2-5}{9x}=2\frac{1}{6}$ eine Gleichung,

$\frac{2x^2-5}{9x}=(7x^2-2xy)\,5$ „ „ .

Anmerkung. Formeln sind Gleichheiten und nicht Gleichungen. Will man aber diesen Unterschied nicht machen, so muß man zwischen identischen Gleichungen und Bestimmungsgleichungen unterscheiden.

Erklärung 3. Eine Gleichung auflösen heißt die Werte (Wurzeln) bestimmen, welche der bzw. den veränderlichen Zahlen zu geben sind, damit die Gleichung zu einer Gleichheit wird. In Gleichungen werden daher die Veränderlichen als die Unbekannten bezeichnet.

Führt man in einer Gleichung die vorgeschriebenen Rechnungen aus, soweit dies möglich ist, und bringt, falls Brüche vorhanden sind, auf den beiden Seiten der Gleichung sämtliche Glieder auf denselben Nenner, so kann dieser weggelassen werden; denn ist $\frac{A}{N} = \frac{B}{N}$, so ist auch $A = B$. Tritt dann die Unbekannte (bzw. die Unbekannten) nur in der ersten Potenz auf, so heißt die Gleichung eine **Gleichung ersten Grades.**

Eine Gleichung mit mehr als einer Unbekannten ist schon dann von höherem als dem ersten Grade, wenn in ihr Produkte aus den Unbekannten auftreten.

Aufg. 3. Zeichne das geometrische Bild der Funktion $f(x) = 2x + 5$, bestimme den Wert von x, für den f(x) gleich 13 wird, und prüfe durch Einsetzen die Richtigkeit des Ergebnisses!

Nr. 21. Auflösung der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

Das Verfahren bei der Auflösung einer Gleichung muß das Ziel verfolgen, die Unbekannte aus den arithmetischen Verbindungen, in denen sie in der Gleichung auftritt, zu befreien. Zu dem Zwecke sind die vorgeschriebenen Rechnungen auszuführen, oder wenn dies nicht möglich ist, durch die entgegengesetzten Rechnungsarten rückgängig zu machen.

Regel. Kommen in einer Gleichung Brüche vor, so sucht man den Hauptnenner auf und multipliziert mit ihm jedes Glied auf beiden Seiten der Gleichung. Dabei ist darauf zu achten, daß die Zähler, wenn sie algebraische Summen sind, in Klammern eingeschlossen werden. Hat man dann alle Multiplikationen ausgeführt, so **ordnet** man die Gleichung (s. Nr. 14) und vereinigt die Glieder auf jeder der beiden Seiten. Dadurch gelangt man zu der **Normalform** einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten:

$$ax = b, \text{ also } x = \frac{b}{a}.$$

Zusatz. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten hat nur eine Wurzel.

Beispiel 1.

$$\frac{x-1}{6} - \frac{2x+1}{9} = 5 - \frac{x+5}{3} \quad \Big| \; 18$$

$$3(x-1) - 2(2x+1) = 5 \cdot 18 - 6(x+5),$$

$$3x - 3 - 4x - 2 = 90 - 6x - 30,$$

$$3x - 4x + 6x = 90 - 30 + 3 + 2,$$

$$5x = 65, \text{ also } x = 13.$$

Beispiel 2.

$$\frac{21x}{2x+3} - \frac{18x}{2x-3} = \frac{6x^2 = 108}{4x^2-9}. \quad \Big| \ (2x+3)(2x-3)$$

$$21x(2x-3) - 18x(2x+3) = 6x^2 = 108,$$

$$42x^2 - 63x - 36x^2 - 54x = 6x^2 - 108,$$

$$42x^2 - 63x - 36x^2 - 54x - 6x^2 = -108,$$

$$-117x = -108, \text{ also } x = \frac{12}{13}.$$

Die Auflösung der Gleichungen ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, um schwierigere, den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten entnommene Aufgaben auszuführen.

Beispiel 1. Ein Kapital von 4500 ℳ war in einem Geschäft unter der Bedingung angelegt, daß der Zinsfuß jährlich um 0,3 % steigen und die Zinsen nach 4 Jahren mit dem Kapital zugleich ausbezahlt werden sollten. Wieviel Prozent waren für das erste Jahr berechnet, wenn die Auszahlung 5481 ℳ betrug?

Aufl. Die Zinsen betrugen $5481 - 4500 = 981$ ℳ.

War x % der Zinsfuß des ersten Jahres, so hat man

im	1ten	2ten	3ten	4ten Jahre
den Zinsfuß	x	$x + 0,3$	$x + 0,6$	$x + 0,9$ %
und die Zinsen	$\frac{4500}{100}x$	$45(x + 0,3)$	$45(x + 0,6)$	$45(x + 0,9)$ ℳ,

und demnach lautet die Gleichung:

$$45x + 45(x + 0,3) + 45(x + 0,6) + 45(x + 0,9) = 981,$$

oder

$$45(x + x + 0,3 + x + 0,6 + x + 0,9) = 981,$$

also

$$45(4x + 1,8) = 981.$$

Hieraus folgt:

$$180x + 81 = 981,$$

oder

$$180x = 981 - 81 = 900,$$

und somit:

$$x = 5.$$

Der Zinsfuß des ersten Jahres betrug also 5 %.

Beispiel 2. Ein Kaufmann mischt zwei Sorten Tee, das kg zu 7 ℳ und zu 10 ℳ, im ganzen 1500 kg. Wieviel von jeder Sorte hat er genommen, wenn er das kg der Mischung zu 9 ℳ verkauft und dabei 12,5 % gewinnt?

Aufl. Hat er von der ersten Sorte x kg, von der zweiten also $1500 - x$ kg genommen, so beträgt der Preis der ersten Sorte $7x$ ℳ und der Preis der zweiten Sorte $(1500 - x) \cdot 10$ ℳ, der Preis der ganzen Mischung also $7x + (1500 - x) \cdot 10$ ℳ,

und somit stellt sich der Preis für 1 kg der Mischung auf $\frac{7x + (1500 - x) \cdot 10}{1500}$ ℳ.

Da 12,5 % verdient werden, so beträgt der Verkaufspreis $\frac{112,5}{100}$ des Mischungspreises, und demnach erhält man die Gleichung

$$\frac{7x + (1500 - x) \cdot 10}{1500} \cdot \frac{112,5}{100} = 9,$$

oder

$$7x + (1500 - x) \cdot 10 = \frac{9 \cdot 100 \cdot 1500}{112,5} = 12000$$

mit der Wurzel $x = 1000$.

Der Kaufmann hat demnach 1000 kg der ersten und 500 kg der zweiten Sorte genommen.

Nr. 22. Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten.

Ist eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten x und y nach dem in Nr. 21 angegebenen Verfahren auf die Normalform

$$ax + by = c$$

gebracht, so kann sie dazu benutzt werden, x als eine Funktion von y oder y als eine Funktion von x darzustellen, und liefert durch Umgestaltung

$$x = \frac{c - by}{a}, \quad y = \frac{c - ax}{b}.$$

Man erkennt hieraus, daß **eine** Gleichung mit zwei Unbekannten zu deren Bestimmung **nicht** ausreicht.

Besteht aber gleichzeitig zwischen x und y eine zweite, aus der ersten nicht ableitbare und ihr nicht widersprechende Gleichung mit der Normalform

$$a'x + b'y - c'$$

und den Umgestaltungen

$$x = \frac{c' - b'y}{a'} \text{ und } y = \frac{c' - a'x}{b'},$$

so ergibt sich aus der Forderung, daß in den beiden Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$

x dieselbe Zahl sein soll, die Gleichung $\frac{c' - b'y}{a'} = \frac{c - by}{a}$,

y " " " " " " $\frac{c' - a'x}{b'} = \frac{c - ax}{b}$.

Jede der beiden letzten Gleichungen besitzt nur eine Wurzel, und somit ergibt sich:

Lehrsatz 22. Zur eindeutigen Bestimmung zweier Unbekannten x und y sind zwei voneinander unabhängige und sich nicht widersprechende Gleichungen ersten Grades zwischen x und y erforderlich und ausreichend.

Zusatz. Entsprechend lautet der Satz für 3 oder noch mehr Unbekannte.

Anmerkung. Die geometrischen Bilder (siehe Nr. 20, Anmerkung 2) der Funktionen $y = \frac{c - ax}{b}$ und $y = \frac{c' - a'x}{b'}$ sind gerade Linien, und zwei Geraden können sich nur in einem Punkte schneiden.

Da hiernach in zwei gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$1.\ a_1x + b_1y = c_1,$$
$$2.\ a_2x + b_2y = c_2$$

die Unbekannten dieselben Werte besitzen, so sind folgende Wege zur Auflösung möglich:

a) Man drückt nach jeder der Gleichungen x oder y aus und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich. **(Lösung durch Gleichsetzen.)**

Es ist nach 1. $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ | $y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$

und nach 2. $x = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2}$, | $y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}$,

also $\frac{c_2 - b_2 y}{a_2} = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$. | $\frac{c_2 - a_2 x}{b_2} = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$.

Ist aus einer dieser Gleichungen die Unbekannte bestimmt, so kann man ihren Wert in 1. oder 2. einsetzen und dann die andere berechnen.

b) Man drückt nach einer der Gleichungen x oder y aus und setzt den gefundenen Ausdruck für x bzw. y in die andere Gleichung ein. **(Lösung durch Einsetzen.)**

Es ist nach 1. $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$, | $y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$,

also nach 2. $a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} + b_2 y = c_2$. | $a_2 x + b_2 \cdot \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c_2$.

c) Man gestaltet die Gleichungen durch Multiplikation so um, daß eine der Unbekannten gleiche Koeffizienten mit entgegengesetzten Vorzeichen besitzt, und verbindet dann die Gleichungen durch Addition. **(Lösung durch Addition.)**

$$\begin{array}{rl|l} a_1 x + b_1 y &= c_1 & b_2 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 & -b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x &= c_1 b_2 - c_2 b_1 & \\ x &= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} a_1 x + b_1 y &= c_1 & -a_2 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 & a_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y &= c_2 a_1 - c_1 a_2 & \\ y &= \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. & \end{array}$$

Auf jedem der drei Wege wird eine der Unbekannten aus den Gleichungen fortgeschafft **(eliminiert)**, um eine Gleichung für die andere herzustellen.

Bei mehr als zwei Unbekannten entstehen auf jedem der drei Wege zunächst nur Gleichungen, die eine Unbekannte weniger als die ursprünglichen enthalten. Sind diese Zwischengleichungen geordnet, so wird das Verfahren wiederholt, und dies geschieht so lange, bis eine Gleichung mit einer Unbekannten entstanden ist. Am einfachsten gestaltet sich dabei die Auflösung durch Addition.

Beispiel.

$$\begin{array}{rl|l|l} x - 2y + 3z &= 2 & -1 & \\ 2x - 3y + z &= 1 & +3 & +4 \\ 5x + y - 4z &= 13 & & +1 \\ \hline 5x - 7y &= 1 & -11 & \\ 13x - 11y &= 17 & 7 & \\ \hline 36x &= 108, & \text{also } \mathbf{x = 3}. & \end{array}$$

Jetzt ist $7y = 15 - 1 = 14$, also $\mathbf{y = 2}$, und dann $z = 1 - 6 + 6$, also $\mathbf{z = 1}$.

Zweiter Teil.

Die Rechnungsarten dritter Stufe.

Kapitel 5.

Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

Nr. 23. Erklärung des Potenzbegriffs.

So wie die Addition bei gleichgroßen Summanden zur Multiplikation führt, so leitet auch die Multiplikation zu einer neuen Rechnungsart, wenn die Faktoren eines Produktes einander gleich sind. Da hiernach eine zweite Annahme über die zur Rechnung verwandten Größen gemacht wird, so ist die neue Rechnungsart als eine **Rechnungsart dritter Stufe** zu bezeichnen.

Erklärung 1. Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren wird **Potenz** genannt. Man schreibt eine Potenz in der Form b^n (gelesen: b hoch n oder b in der n^{ten}) und bezeichnet den Faktor b als die Grundzahl (Basis) und die Anzahl n der Faktoren b als den Exponenten der Potenz $a = b^n$.

Zusatz 1. Der Exponent n ist eine unbenannte, positive ganze Zahl.

Zusatz 2. Die Grundzahl b kann jede beliebige unbenannte Zahl sein. Ist die Grundzahl eine benannte Zahl, so kommt der Potenz nur in wenigen Fällen eine Bedeutung zu.

So ist z. B. $(8\,m)^2$ ein Quadrat und $(8\,m)^3$ ein Würfel, dessen Seite bzw. Kante gleich 8 cm ist.

Zusatz 3. Ist die Grundzahl b positiv, so sind es auch ihre sämtlichen Potenzen. $(+b)^n = +b^n$.

Zusatz 4. Ist die Grundzahl b negativ, so sind ihre Potenzen
positiv, wenn die Exponenten gerade Zahlen (2n),
und negativ, " " " ungerade " (2n + 1) sind.

$$(-b)^{2n} = +b^{2n}, \quad (-b)^{2n+1} = -b^{2n+1}.$$

Erklärung 2. Eine Zahl b mit n potenzieren heißt die n^{te} Potenz der Zahl b bilden.

Nr. 24. Das Rechnen mit Potenzen.

a) Die Addition und Subtraktion von Potenzen kann nur dann ausgeführt werden, wenn ihre Grundzahlen und auch ihre Exponenten einander gleich sind.

$$ab^n + a'b^n = (a + a')\,b^n.$$

b) Die Multiplikation oder Division von Potenzen kann zunächst ausgeführt werden, wenn ihre Grundzahlen einander gleich sind. So enthält

das Produkt $b^p \cdot b^q \cdot b^r$ $p + q + r$ Faktoren b,
der Quotient $b^p : b^q$ $(p > q)$ $p - q$ Faktoren b,

und daraus folgt:

Lehrsatz 23. Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden multipliziert durch **Addition** ihrer Exponenten.*)

$$b^p \cdot b^q \cdot b^r = b^{p+q+r}.$$

Lehrsatz 24. Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden dividiert durch **Subtraktion** ihrer Exponenten.

$$b^p : b^q = b^{p-q}.$$

Ferner kann die Multiplikation oder Division von Potenzen ausgeführt werden, wenn ihre Exponenten einander gleich sind. So enthält das Produkt $a^n b^n c^n$ jeden der Faktoren a, b und c n-mal, und diese Faktoren können nach dem Grundgesetz der Multiplikation so gruppiert werden, daß das Produkt $a \cdot b \cdot c$ n-mal als Faktor auftritt. Ebenso kann der Quotient $\frac{a^n}{b^n}$ als Produkt aus n Brüchen von der Form $\frac{a}{b}$ dargestellt werden. Somit ergibt sich:

Lehrsatz 25. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert durch **Multiplikation** ihrer Grundzahlen.

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n.$$

Lehrsatz 26. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert durch **Division** ihrer Grundzahlen.

$$a^n : b^n = (a : b)^n \text{ und } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Folgerung. Die Multiplikation und Division von Potenzen kann ausgeführt werden, wenn entweder ihre Grundzahlen oder ihre Exponenten einander gleich sind.

c) Lehrsatz 27. Potenzen werden potenziert durch Multiplikation der Exponenten.

$$(b^p)^q = b^{p \cdot q}.$$

*) Die knappe Form wurde der bequemen Einprägung wegen gewählt. Ein Mißverständnis ist wohl nicht zu befürchten.

Bew. Es ist $(b^p)^q = b^p \cdot b^p \cdot b^p \cdot \cdot \cdot \cdot b^p$ (q Faktoren),

$$= b^{\underbrace{p+p+p\cdots+p}_{q \text{ Summanden}}},$$

$$= b^{p \cdot q}.$$

Die Umkehrung der Lehrs. 25—27 liefert die Formeln:

$$\mathbf{(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n.}$$

$$\mathbf{(a:b)^n = a^n : b^n} \text{ oder } \mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

$$\mathbf{b^{pq} = (b^p)^q = (b^q)^p.}$$

Zusatz. Der Lehrs. 27 und seine Umkehrung gelten auch für mehr als zwei Exponenten.

Übungen.

1. $25a^4 - 17a^4 - 13b^5 + 6b^5$.
2. $5a^3 \cdot 7a^5$; $3x^2y^4 \cdot 8x^5y^4$; $(2a^3b - 3ab^2)^2$.
3. $72x^5 : 9x^3$; $0{,}75a^{p+q} : 1{,}25a^{p-q}$.
4. $7{,}5^3 \cdot 0{,}4^3$; $(2x+3y)^2 (2x-3y)^2$.
5. $1{,}25^4 : 0{,}25^4$; $(9a^2 - 4b^2)^3 : (3a+2b)^3$.
6. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 \cdot (x^2 - y^2)^2$.
7. $\left(\frac{3a-4b}{2x+3y}\right)^5 : \left(\frac{9a^2+9b^2}{4x^2-9y^2}\right)^2$.
8. $(a^{2x+3y})^{2x+3y} : (a^{2x-3y})^{2x-3y}$.
9. $(2a^2 - 3b^2)^4$ zu berechnen.

Kapitel 6.

Wurzeln.

Nr. 25. Begriff der Wurzel. Irrationale Zahlen.

So wie die Umkehrung der Addition und Multiplikation zu der Subtraktion bzw. Division führt, so leitet auch die Umkehrung des Potenzierens auf neue, mit ihm derselben Stufe angehörige Rechnungsarten. Ist der Wert a der Potenz b^n bekannt und außerdem noch

n, so kann nach dem Wert der Grundzahl b gefragt werden,
oder b, " " " " " des Exponenten n " " .

Z. B. Welche Grundzahl liefert in der vierten Potenz 81?
" " " " " dritten " $8a^{12}$?
Die wievielte Potenz von 4 ist gleich 64?
" " " " $2x^2$ " " $32x^{10}$?

Das Potenzieren führt also durch Umkehrung zu zwei neuen Rechnungsarten. Zunächst soll von der ersten Umkehrung die Rede sein.

Erklärung 1. Das Zahlzeichen $\sqrt[n]{a}$ (gelesen n^{te} Wurzel aus a) bedeutet die Grundzahl, deren n^{te} Potenz gleich a ist. a heißt Radikandus und n heißt Exponent der Wurzel.

Folgerung. Es ist $\left(\sqrt[2]{a}\right)^2 = a$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

und $\sqrt{a^n} = a$, $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

Zusatz 1. Der Exponent n ist eine unbenannte, positive ganze Zahl.

Zusatz 2. Der Radikandus darf nur dann negativ sein, wenn n eine ungerade Zahl ist. (S. Nr. 23, Zusatz 4.) Ist a bei einem geraden Exponenten negativ, so entspricht der Wurzel keine Zahl des bisherigen Zahlengebietes.

Zusatz 3. Ist der Exponent eine gerade Zahl, so ist die Wurzel aus einer positiven Zahl doppeldeutig*), weil $(+a)^{2n} = +a^{2n}$ und auch $(-a)^{2n} = +a^{2n}$ ist.

Zusatz 4. Die erste Wurzel aus einer Zahl $\left(\sqrt[1]{a}\right)$ ist die Zahl selbst. Die zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel und wird in der Regel ohne den Exponenten 2 geschrieben. So ist $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$.

Die dritte Wurzel heißt auch Kubikwurzel.

Zusatz 5. Läßt sich der Radikandus nicht als Potenz mit dem Exponenten der Wurzel darstellen (z. B. $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{9}$), so sagt man: Die Wurzel geht nicht auf.

Geht eine Wurzel nicht auf, so entspricht ihr keine Zahl des bisherigen Zahlengebietes. So ist $\sqrt{7}$ zunächst keine ganze Zahl, da $2^2 = 4$ und 3^2 bereits gleich 9 ist. Die zwischen 2 und 3 liegenden Zahlen des bisherigen Gebietes aber sind Brüche, und da bei der Multiplikation eines Bruches mit sich selbst eine Kürzung nicht eintreten kann, also wieder ein Bruch entsteht, so kann $\sqrt{7}$ auch nicht einer der Brüche zwischen 2 und 3 sein. Da aber Größen dieser Art zweifellos vorkommen, ja sogar geometrisch dargestellt werden können (s. Abschn. I Nr. 34, Zus. zu Lehrs. 65), so muß eine (dritte) Erweiterung des Zahlengebietes eintreten.

Erklärung 2. Geht eine Wurzel nicht auf, so wird ihr Wert als eine **irrationale** Zahl bezeichnet. Die ganzen und gebrochenen Zahlen heißen im Gegensatz dazu rationale Zahlen.

Zusatz 1. Irrationale Zahlen können positiv und negativ sein.

---

*) Auf die Vieldeutigkeit der Wurzeln kann erst später eingegangen werden.

Zusatz 2. Der Wert einer irrationalen Zahl kann nicht genau angegeben werden. Dagegen ist es möglich, ihn in beliebig enge Grenzen einzuschließen und durch einen nichtperiodischen Dezimalbruch darzustellen.

Zusatz 3. Durch Einführung der irrationalen Zahlen geht das Bild der Zahlenreihe in eine ununterbrochene Gerade über.

Nr. 26. Ausziehung der Quadratwurzel.

Die Entscheidung, ob eine Wurzel aus einem eingliedrigen Ausdruck gezogen werden kann, ist leicht zu treffen.

Bei einem mehrgliedrigen Ausdruck geht die Wurzel nur dann auf, wenn der Ausdruck als das Quadrat einer algebraischen Summe dargestellt werden kann. Nun ist zunächst

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy - y^2.$$

Besteht daher der Radikandus aus den geordneten Gliedern a, b und c $(a + b + c)$, so muß $a = x^2$ sein und die Division von b durch $2x$ einen Quotienten liefern, dessen Quadrat gleich c ist.

Beispiel. In $\sqrt{4a^2 - 44ab + 121b^2}$ ist das erste Glied gleich $(2a)^2$; die Division von $-44ab$ durch $4a$ liefert $-11b$, und das Quadrat von $-11b$ ist $121b^2$. Demnach ist $\sqrt{4a^2 - 44ab + 11b^2} = 2a - 11b$.

Besteht der Radikand aus 4 oder mehr Gliedern, so muß die Wurzel das Quadrat einer Summe aus mindestens 3 Gliedern sein. Nun ist aber

$$(x + y + z)^2 = x^2 + (2x + y)y + (2x + 2y + z)z,$$

und da man beim Ausziehen der Wurzel den Weg rückwärts gehen muß, den man bei der Bildung des Quadrates eingeschlagen hat, so ist die Entscheidung, ob die Wurzel aufgeht, durch das folgende Verfahren zu treffen:

Regel. Man zieht aus dem ersten Gliede des geordneten Radikandus A die Wurzel x und bildet den Rest $R_1 = A - x^2$. Liefert dann das erste Glied des Restes bei der Division durch $2x$ den Quotienten y, so bildet man das Produkt $(2x + y)y$ und subtrahiert es von R_1. Nun dividiert man das erste Glied des dadurch entstehenden Restes R_2 wieder durch $2x$, bildet mit dem Quotienten z das Produkt $(2x + 2y + z)z$ und subtrahiert es von R_2, usw., wenn noch Glieder des Radikandus übrig bleiben.

Beispiel. $\sqrt{36a^4 - 84a^3b + 109a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4} = \underbrace{6a^2}_{x} - \underbrace{7ab}_{y} + \underbrace{5b^2}_{z}$

$$\begin{array}{ll} x^2 = & 36a^4 \\ & - \\ \hline R_1 = & -84a^3b + 109a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4 \\ (2x + y)y = & -84a^3b + 49a^2b^2 \\ & + \quad - \\ \hline R_2 = & 60a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4 \\ (2x + 2y + z)z = & 60a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4 \\ & - \quad + \quad - \end{array}$$

Divisor $= 12a^2$

Bei der Ausziehung der Wurzel aus einer mehrziffrigen Zahl erfordert das Verfahren etwas mehr Aufmerksamkeit, weil hier die Glieder zu einer Zahl zusammengezogen sind. Bezeichnen x, y und z die Ziffern einer dreistelligen Zahl, so ist diese gleich $100x + 10y + z$, ihr Quadrat also gleich

$$10000x^2 + (200x + 10y) \cdot 10y + (200x + 10y + z)z$$

oder gleich $10000x^2 + (20x + y) \cdot 100y + [2(10x + y) \cdot 10 + z] \cdot z$.

Diese Form weist darauf hin, daß zur Bestimmung von x die 4 letzten und zur Bestimmung von y die zwei letzten Stellen nicht benutzt werden. Man teilt demnach den Radikandus von den Einern ab nach links in Gruppen von je zwei Stellen ein, bestimmt die größte Quadratzahl, die in der ersten Gruppe (links) steckt und zieht sie von der Zahl in der ersten Gruppe ab. Nimmt man zu dem Reste die zweite Gruppe hinzu, so muß in der dadurch entstehenden Zahl das Produkt $(20x + y)y$ als Summand enthalten sein. Demnach findet man die Ziffer y, wenn man (durch 20x oder) unter Ausschluß der letzten Ziffer durch 2x dividiert und darauf achtet, daß y^2 als zweiter Summand in der Zahl enthalten sein muß. Der Faktor $20x + y$ wird durch Anhängen der Ziffer y an den Wert von 2x gebildet. Ist dann das Produkt $(20x + y)y$ abgezogen und die folgende Gruppe dem Reste angehängt, so muß die dadurch enstandene Zahl gleich dem Produkt $[2 \cdot (10x + y) \cdot 10 + z]z$ sein. Man findet daher z, wenn man die Zahl unter Ausschluß der letzten Ziffer durch $2 \cdot (10x + y)$, d. h. durch das Doppelte des bereits gefundenen Bestandteils der Wurzel dividiert.

Das Verfahren wird entsprechend weiter fortgesetzt, wenn der Radikandus mehr als 6 Ziffern besitzt.

Beispiel.

	$\sqrt{97\vert 21\vert 96}$	$= \overset{x\,y\,z}{986}$.
$x^2 =$	81	
	16 21	Divisor $2x = 18$
$(20x + y)y =$	15 04	
	1 17 96	Divisor $2(10x + y) = 196$
$[2(10x + y) \cdot 10 + z]z =$	1 17 96	

Läßt man das zur Erläuterung dienende Beiwerk weg und subtrahiert, ohne erst das Teilprodukt hinzuschreiben, so nimmt die Rechnung die Form an:

$\sqrt{97\vert 21\vert 96} = 986$.	
16 21	18_8
1 17 96	196_6

Das angegebene Verfahren ist auch für die Ausziehung der Wurzel aus einer Dezimalzahl verwendbar, wenn diese von den Einern ab nach links

und rechts in Gruppen von je zwei Stellen zerlegt und im Resultat das Komma gesetzt wird, sobald die letzte Gruppe vor dem Komma des Radikandus benutzt ist.

Beispiel.

$$\sqrt{7|89,04|81} = 28,09.$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,89 & 4_8 \\ 5\,04 & 56 \\ 5\,04\,81 & 56\,0_9 \end{array}$$

Soll aus einem Bruch, dessen Zähler und Nenner nicht Quadrate sind, die Wurzel gezogen werden, so wird der Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt und auf diesen (indem man aus der Periode oder bei einer Dezimalzahl durch Anhängen von Nullen immer wieder neue Gruppen bildet) das Ausziehungsverfahren so lange angewandt, bis der erforderliche Grad von Genauigkeit für die Wurzel erreicht ist. In entsprechender Weise verfährt man bei Wurzeln aus ganzen Zahlen, wenn sie nicht aufgehen.

Beispiel. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 15 cm und 25 cm lang. Wie groß ist die Hypotenuse?

Aufl. Wird die Hypotenuse mit x bezeichnet, so ist $x = \sqrt{15^2 + 24^2}$ cm, also

$$x = \sqrt{8|01} \text{ cm} = 28,30 \text{ cm}.$$

$$\begin{array}{r|l} 4\,01 & 4_8 \\ 1700 & 56_3 \\ 1100 & 566 \end{array}$$

Anmerkung. Beachtet man, daß

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ist, so kann man die Ausziehung der **Kubikwurzel** aus algebraischen Summen dem Verfahren bei der Quadratwurzel nachbilden.

Beispiel. $\sqrt[3]{64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3} = 4\overset{x}{a} - 3\overset{y}{b}.$

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 64a^3 \\ R_1 = & \qquad -144a^2b + 108ab^2 - 27b^3 \quad | \text{ Div. } 3x^2 = 48a^2 \\ 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = & -144a^2b + 108ab^2 - 27b^3. \end{array}$$

Nr. 27. Das Rechnen mit Wurzeln.

a) Die Addition und Subtraktion von Wurzeln ist nur dann ausführbar, wenn sowohl ihre Radikanden als auch ihre Exponenten einander gleich sind.

So ist $5\sqrt[7]{a^4} + 3\sqrt[7]{a^4} - 4\sqrt[7]{a^4} = 4\sqrt[7]{a^4}$.

Lehrsatz 28. Der Wert einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man ihren Exponenten und den Exponenten ihres Radikandus mit einer ganzen Zahl multipliziert.

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pr]{a^{qr}}.$$

Bew. Ist $\sqrt[pr]{a^{qr}} = x$, so hat man $x^{pr} = a^{qr}$ oder $(x^q)^r = (a^q)^r$, also $x^p = a^q$ und somit $x = \sqrt[p]{a^q}$.

Lehrsatz 29. Besitzt der Wurzelexponent mit dem Exponenten des Radikandus einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann dieser durch Division entfernt werden.

$$\sqrt[pr]{a^{qr}} = \sqrt[p]{a^b}.$$

Bew. Der Satz ist die Umkehrung des Lehrs. 28.

Lehrsatz 30. Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multipliziert durch Multiplikation ihrer Radikanden.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Bew. Ist $\sqrt[n]{a} = x$, also $x^n = a$, und $\sqrt[n]{b} = y$, also $y^n = b$, so hat man $x^n y^n = a \cdot b$ oder $(xy)^n = a \cdot b$, also $xy = \sqrt{a \cdot b}$.

Folgerung. Eine Wurzel wird potenziert durch Potenzierung ihres Radikanden.

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^p}.$$

Lehrsatz 31. Wurzeln mit gleichen Exponenten werden dividiert durch Division ihrer Radikanden.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \text{ oder } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Bew. Entsprechend wie bei Lehrs. 30.

Nach Lehrs. 28 können Wurzeln mit verschiedenen Exponenten stets auf denselben Exponenten gebracht, also gleichnamig gemacht werden. Daraus folgt:

Zusatz. Wurzeln mit verschiedenen Exponenten werden gleichnamig gemacht und dann nach Lehrs. 30 oder 31 multipliziert bzw. dividiert.

Lehrsatz 32. Aus einer Wurzel wird eine Wurzel gezogen durch Multiplikation der beiden Exponenten.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}.$$

Bew. Ist $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = x$, so hat man $y^p = \sqrt[q]{a}$, also $x^{pq} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a$ und somit $x = \sqrt[pq]{a}$.

Zusatz. Es ist auch $\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}$.

Die Umkehrung der Lehrs. 30—32 liefert die Formeln:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2. $\sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$.

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

4. $\sqrt[pq]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$.

b) Rationalmachen des Nenners. Treten im Nenner eines Bruches Wurzeln auf, so lassen sich diese durch geeignete Erweiterung häufig beseitigen. Hat der Nenner nur ein Glied, so ist die Beseitigung stets möglich; der Erweiterungsfaktor ist dann die gleichnamige Wurzel aus einer Potenz des Radikanden, welche mit diesem multipliziert eine Potenz mit dem Exponenten der Wurzel liefert.

So ist
$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b}.$$
$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{b^2}.$$
$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-m}}.$$

Besitzt der Nenner mehr als ein Glied, so ist die Beseitigung der Wurzeln nur bei Quadratwurzeln möglich. Da $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ist, so hat man in folgender Weise zu verfahren:

a) Bei zweigliedrigen Nennern erhält man den Erweiterungsfaktor, wenn man dem zweiten Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

So ist
$$\frac{8\sqrt{21} + 3\sqrt{35}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{(8\sqrt{21} + 3\sqrt{35})(3\sqrt{3} + \sqrt{5})}{27 - 5}$$
$$= \frac{1}{22}\left(87\sqrt{7} + 17\sqrt{105}\right).$$

b) Bei dreigliedrigen Nennern faßt man zunächst zwei Glieder durch Einklammern zu einem zusammen und verfährt dann zweimal wie im Falle a.

So ist
$$\frac{23}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{23(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2},$$
$$= \frac{23(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{5 + 4\sqrt{3}},$$
$$= \frac{23(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(4\sqrt{3} - 5)}{48 - 25},$$
$$= 12 + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

c) Hat der Nenner vier Glieder, so bildet man zwei Summen aus zwei Gliedern.

So ist $\frac{a}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{a(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2},$

$$= \frac{a(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{18+12\sqrt{6}-2\sqrt{35}}.$$

Die weitere Rechnung geschieht nun wie im Falle b.

c) Rationalmachen einer Gleichung. Kommt die Unbekannte (oder die Unbekannten) in dem Radikandus einer oder mehrerer Quadratwurzeln vor, so ist es vielfach möglich, die Gleichung so umzugestalten, daß die Wurzelzeichen verschwinden. Beide Seiten der Gleichung dürfen ins Quadrat erhoben werden (denn ist $A = B$, so ist auch $A^2 = B^2$), und dabei läßt sich dafür Sorge tragen, daß mit jeder Erhebung ins Quadrat mindestens ein Wurzelzeichen verschwindet.

Beispiel. $4\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-5} = \sqrt{x+51}.$

Es ist $(4\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{x+51})^2,$

also $16x + 96 + 9x - 45 - 24\sqrt{(x+6)(x-5)} = x + 51,$

oder $24x = 24\sqrt{(x+6)(x-5)},$

und hiernach $x = \sqrt{(x+6)(x-5)}.$

Erhebt man nochmals ins Quadrat, so folgt:

$$x^2 = (x+6)(x-5) = x^2 + x - 30,$$

und somit: $x = 30.$

Übungen.

1. $\sqrt[27]{8^9}$; $\sqrt[2x]{25^x}$.

2. $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[6]{9x^4}\cdot\sqrt[6]{81x^2}$; $(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$.

3. $\left(\sqrt[3]{5a^2}\right)^2$; $\left(\sqrt[9]{3x^2}\right)^{12}$.

4. $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{\frac{27}{8}}$.

5. $\sqrt{24}\ (= \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6})$; $\sqrt{45}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{324}$.

6. $\sqrt{\frac{2}{3}}\left(= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$; $\sqrt{\frac{4}{11}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

7. $\sqrt{125^4}\left(= \left(\sqrt[3]{125}\right)^4 = 5^4 = 625\right)$; $\sqrt{49^3}$; $\sqrt[4]{81^3}$.

8. $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$; $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a^r}}$.

9. $\sqrt[4]{2}\,\sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{32}$ $\Big(= \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{4^4}$ oder $2^8 \cdot \sqrt[12]{32^2}$ oder 2^{10}

$= \sqrt[12]{2^{21}} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{2^3}\Big)$.

Kapitel 7.

Erweiterung des Potenzbegriffs.

Nr. 28. Potenzen mit negativen Exponenten.

Die Formel $b^p : b^q = b^{p-q}$ verliert zunächst ihre Bedeutung, wenn p nicht größer als q ist. Schreibt man aber die Divisionsaufgabe in Bruchform, so erhält man durch Kürzung

1. $\frac{b^p}{b^q} = b^{p-q}$, wenn $p > q$ ist.

2. $\frac{b^p}{b^q} = 1$, wenn $p = q$ ist.

3. $\frac{b^p}{b^q} = \frac{1}{q^{p-p}} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$, wenn $p < q$ ist und $q - p$ durch n ersetzt wird.

Hierauf gründet sich die folgende Erweiterung des Potenzbegriffs:

Erklärung. Das Zahlzeichen b^0 hat für jede Grundzahl b den Wert **1**, und das Zahlzeichen b^{-n} bedeutet die n^te Potenz des reziproken Wertes der Grundzahl b.

Lehrsatz 33. Die Potenzen mit negativen Exponenten unterliegen denselben Gesetzen wie die Potenzen mit positiven Exponenten.

Zum Beweise dieses Satzes ersetzt man die Potenzen mit negativen Exponenten durch die Potenzen der reziproken Werte ihrer Grundzahlen, führt an diesen die verlangten Rechnungen aus und schreibt das Resultat, falls es nötig ist, wieder als Potenz mit negativem Exponenten.

Die vorgenommene Erweiterung gilt auch für den Wurzelbegriff.

Übungen. 1. $a^{3x} \cdot a^{-2x}$.

2. $a^{5x} : a^{-3x}$.

3. $(a^5)^{-2}$.

4. Aus dem Bruche $\frac{a^7 b^{-3} c^4}{a^{-5} b^4 c^{-3}}$ den Nenner zu beseitigen.

5. $\sqrt[-3]{24}\,\sqrt{96}$; $\sqrt[-5]{8} : \sqrt[-3]{32}$.

Nr. 29. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Auch die Einschränkung, daß der Exponent eine ganze Zahl sein soll, kann fallen gelassen werden durch die folgende Erweiterung des Potenzbegriffs:

Erklärung. Das Zahlzeichen $a^{\frac{p}{q}}$ bedeutet die q^{te} Wurzel aus a^p.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Lehrsatz 34. Die Potenzen mit gebrochenen Exponenten unterliegen denselben Gesetzen wie die Potenzen mit ganzen Exponenten.

$$1.\ a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}. \qquad 2.\ a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}. \qquad 3.\ \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

Bew. zu 1. Da $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qs]{a^{ps}}$

und $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{qr}}$

ist, so hat man $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}}$

$$= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Bew. zu 2. Da $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ und $b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$

ist, so hat man $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{(ab)^p} = (ab)^{\frac{p}{q}}.$

Bew. zu 3. Da $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}$

ist, so hat man $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$

Die vorgenommene Erweiterung gilt auch für den Wurzelbegriff.

Übungen.

1. $2^{1,25} \cdot 2^{0,25}$; $\quad 4^{0,25} \cdot 4^{-0,75} \cdot 4^{1,5}$.
2. $16^{-\frac{3}{4}} : 16^{-\frac{5}{4}}$; $\quad \left(a^3 - b^2\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$.
3. $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$; $\quad 3^{\frac{3}{4}} \cdot 27^{\frac{3}{4}}$.
4. $43,2^{\frac{1}{3}} : 0,2^{\frac{1}{3}}$.
5. $\left(2^{2,5}\right)^4$; $\quad \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{10}} \cdot \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{7}{10}} \cdot \left(3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{7}{10}}$.

Kapitel 8.

Die Logarithmen.

Nr. 30. Begriff des Logarithmus.

Die zweite Umkehrung des Potenzierens wird eingeführt durch die Erklärung:

Erklärung 1. Der Logarithmus einer Zahl a für die Grundzahl b ist die Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten. Als Zeichen für den Logarithmus einer Zahl a, bezogen auf die Grundzahl b, wird das Zahlzeichen $\log^b a$ gebraucht.

Ist $a = b^n$, so ist $n = \log^b a$.

Beispiele. Es ist $3^4 = 81$, also $\log^3 81 = 4$.
$4^3 = 64$, " $\log^4 64 = 3$.
$0{,}3^4 = 0{,}0081$, " $\log^{0,3} 0{,}0081 = 4$.
$10^{-3} = 0{,}001$, " $\log^{10} 0{,}001 = -3$.
$8^{\frac{2}{3}} = 4$, " $\log^8 4 = \frac{2}{3}$.

Folgerung 1. Es ist $\log^b b^n = n$, also $\log^b b = 1$ und $b^{\log^b a} = a$.

Folgerung 2. Es ist $\log^b 1 = 0$, weil $b^0 = 1$,
$\log^1 1$ unbestimmt, weil $1^n = 1$ ist.

Ist die Grundzahl b positiv, so sind ihre sämtlichen Potenzen positiv. Daraus folgt:

Zusatz 1. Bei einer positiven Grundzahl sind Logarithmen für negative Zahlen nicht vorhanden.

Zusatz 2. Läßt sich eine Zahl nicht als Potenz der Grundzahl mit einem ganzen oder gebrochenen Exponenten darstellen, so ist ihr Logarithmus für diese Grundzahl irrational.

So sind $\log^4 12$, $\log^2 3$, $\log^{10} 189$ irrationale Zahlen.

Erklärung 2. Die Logarithmen aller positiven Zahlen für eine Grundzahl bilden das auf diese Grundzahl bezogene **Logarithmensystem.**

Zusatz. Jede positive Zahl, die größer als 1 ist, kann als Grundzahl eines Logarithmensystems gewählt werden.

Nr. 31. Die Hauptsätze über Logarithmen.

Für jede Grundzahl eines Logarithmensystems bestehen die Sätze:

Lehrsatz 35. Der Logarithmus eines **Produktes** ist gleich der Summe aus den Logarithmen seiner Faktoren. $\log(ab) = \log a + \log b$.

Bew. Ist g die Grundzahl und $a = g^x$, also $x = \log^g a$,
$b = g^y$, " $y = \log^g b$,
so hat man $ab = g^{x+y}$, " $x + y = \log^g (ab)$,
und somit $\log^g (ab) = x + y = \log^g a + \log^g b$.

Lehrsatz 36. Der Logarithmus eines **Bruches** (Quotienten) ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Zählers (Dividendus) und dem Logarithmus des Nenners (Divisors).

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Bew. Entsprechend wie bei Lehrs. 35.

Lehrsatz 37. Der Logarithmus einer **Potenz** ist gleich dem Produkt aus ihrem Exponenten und dem Logarithmus ihrer Grundzahl. $\log a^n = n \log a$.

Bew. Nach Lehrs. 35, da $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n Faktoren) ist.

Lehrsatz 38. Der Logarithmus einer **Wurzel** ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus ihres Radikandus und ihrem Exponenten. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$.

Bew. Ist $\sqrt[n]{a} = x$, so ist $x^n = a$, also $n \log x = \log a$ und somit $\log x = \frac{1}{n} \log a$.

Zusatz. Es ist $\log \sqrt[p]{a^q} = \frac{q}{p} \log a$.

Anmerkung. Der Logarithmus einer algebraischen **Summe** kann durch die Logarithmen der Summanden **nicht** ausgedrückt werden

Übungen.

1. Wie groß ist $\log^2 (32 \cdot 64)$ und $\log^3 (81 \cdot 27 \cdot 9)$?
2. $\log^3 (81^2 \cdot 27^3)$ zu berechnen.
3. $\log^3 \frac{81^4}{27^3}$ zu berechnen.
4. $\log^7 \sqrt[3]{343^2}$ zu berechnen.
5. $\log^5 \left(25^2 \cdot \sqrt{25^3}\right)$ zu berechnen.
6. $\log^b \frac{3a^2 \cdot 5x}{4r^3 s^4}$ auszudrücken.

Nr. 32. Logarithmen mit der Grundzahl 10.

Erklärung. Das Logarithmensystem mit der Grundzahl 10 heißt das dekadische oder **gemeine Logarithmensystem**, und seine Logarithmen werden durch das Zeichen log (also ohne Angabe der Grundzahl) gekennzeichnet

Anmerkung. Die gemeinen Logarithmen wurden zuerst von dem Engländer Briggs († 1630) berechnet und werden deshalb auch als Briggssche Logarithmen bezeichnet.

Zusatz. Die gemeinen Logarithmen der Potenzen von 10 sind gleich den Exponenten der Potenzen.

So ist

$$\log 1 = \log 10^0 = 0,\ \log 10 = 1,\ \log 100 = 2,\ \log 10^n = n,\ \log 10^\infty = \infty.$$
$$\log \tfrac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1, \log \tfrac{1}{100} : -2, \log \tfrac{1}{1000} = -3, \log \tfrac{1}{10^n} = -n, \log \tfrac{1}{10^\infty} = -\infty.$$
$$\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2},\ \log \sqrt[3]{10} = \tfrac{1}{3},\ \log \sqrt[n]{10} = \frac{1}{n},\ \log \sqrt[n]{10^m} = \frac{m}{n}.$$

Jede Zahl kann als Produkt aus einer Potenz von 10 und einem Dezimalbruch, dessen höchste Stelle die Einerstelle ist, dargestellt werden.

So ist
$$\begin{aligned} 64275 &= 10000 \cdot 6{,}4275 = 10^4 \cdot 6{,}4275, \\ 6427{,}5 &= 1000 \cdot 6{,}4275 = 10^3 \cdot 6{,}4275, \\ 64{,}275 &= 10 \cdot 6{,}4275 = 10^1 \cdot 6{,}4275, \\ 0{,}064275 &= \tfrac{1}{100} \cdot 6{,}4275 = 10^{-2} \cdot 6{,}4275. \end{aligned}$$

Da aber $\log (ab) = \log a + \log b$ ist, so hat man
$$\begin{aligned} \log 64275 &= 4 + \log 6{,}4275, \\ \log 6427{,}5 &= 3 + \log 6{,}4275, \\ \log 64{,}275 &= 1 + \log 6{,}4275, \\ \log 0{,}064275 &= \log 6{,}4275 - 2. \end{aligned}$$

Diese Aufstellung zeigt, daß der Logarithmus einer Zahl aus zwei Teilen besteht, von denen der eine durch die Stellung des Kommas in der Zahl bestimmt wird, während der andere lediglich von den Ziffern und ihrer Reihenfolge abhängt. Da der erste Teil den Wert der Zahl kennzeichnet, so kann er **Kennziffer** (Charakteristik) genannt werden. Der zweite Teil führt den Namen **Mantisse** (mantissa = Zugabe).

Die Kennziffer ist bei den Zahlen über 1 positiv und gleich der Anzahl der Stellen, die in der Zahl vor der Einerstelle stehen, während sie bei den Zahlen unter 1 negativ und gleich der Anzahl der Stellen ist, die zwischen der Einerstelle und der ersten zählenden Ziffer stehen.

Die Mantisse ist ein zwischen 0 und 1 gelegener Dezimalbruch, weil $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$ ist.

Da die Kennziffer leicht bestimmt werden kann, so enthalten die Logarithmentafeln in der Regel nur die Mantissen.

Kapitel 9.

Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Nr. 33. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Eine jede Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten kann nach der in Nr. 21 angegebenen Anleitung auf die Form

$$ax^2 + bx = c$$

gebracht werden, wo a einen von 0 verschiedenen Wert besitzt. Dividiert man durch a und setzt $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = -q$, so ergibt sich hieraus die **Normalform:**

$$x^2 + px + q = 0 \text{ oder } x^2 + px = -q.$$

Ist $p = 0$, also $x^2 = -q$, so heißt die Gleichung rein-quadratisch. Sind dagegen p und q von 0 verschieden, so heißt die Gleichung gemischt-quadratisch.

Die Auflösung der rein-quadratischen Gleichungen ist einfach; denn aus $x^2 = -q$ folgt: $x = \pm\sqrt{-q}$.

Die Auflösung einer gemischt-quadratischen Gleichung kann auf die Auflösung einer rein-quadratischen zurückgeführt werden. Man gestaltet zu dem Zwecke die Gleichung so um, daß auf der linken Seite das Quadrat einer Summe, bzw. einer Differenz auftritt. Das erste Glied dieser Summe ist x. Bezeichnet man das zweite Glied mit y und setzt $2xy = px$, so wird $y = \frac{p}{2}$. Addiert man dann noch auf beiden Seiten $\frac{p^2}{4}$ (die quadratische Ergänzung),

so erhält man
$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

oder
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

also
$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

und somit
$$x = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die Gleichung hat daher die beiden Wurzeln

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die Addition der beiden Wurzeln liefert

$$x_1 + x_2 = -p,$$

und durch Multiplikation ergibt sich:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$
$$= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right),$$

also:
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Demnach bestehen die Sätze:

Lehrsatz 39. Eine Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten hat **zwei** Wurzeln.

Zusatz 1. Für $\frac{p^2}{4} = q$ werden die Wurzeln einander gleich.

Zusatz 2. Bei Textgleichungen ist jedesmal zu prüfen, ob beide Wurzeln mit den Bedingungen der Aufgabe vereinbar sind.

Lehrsatz 40. Die Summe der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten ist gleich dem negativen Koeffizienten der ersten Potenz der Unbekannten, und das Produkt der Wurzeln ist gleich dem von x freien Gliede.

Hiernach kann die Normalform $x^2 + px + q = 0$ durch

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

ersetzt werden. Da aber

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = (x - x_1)(x - x_2)$$

ist, so folgt:

Zusatz. Läßt sich der Ausdruck $x^2 + px + q$ als ein Produkt zweier Faktoren von der Form $x - x_1$ und $x - x_2$ darstellen, so sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.*)

Beispiel 1. $x^2 - 12x + 35 = 0.$

Es ist $x = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$, also $x_1 = 7$ und $x_2 = 5$.

Oder es ist $x^2 - 12x + 35 = (x - 7)(x - 5)$, also $x_1 = 7$ und $x_2 = 5$.

Beispiel 2. $x^2 + 0{,}12x - 0{,}0493 = 0.$

Es ist $x = -0{,}06 \pm \sqrt{0{,}0036 + 0{,}0493} = -0{,}06 \pm \sqrt{0{,}0529}$

$= -0{,}06 \pm 0{,}23$, also $x_1 = 0{,}17$ und $x_2 = -0{,}29$.

Beispiel 3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 35 cm und die Projektion der anderen Kathete auf die Hypotenuse 24 cm groß. Welche Länge hat die Hypotenuse?

Aufl. Ist die Hypotenuse x cm, also die Projektion der gegebenen Kathete auf die Hypotenuse x − 24 cm lang, so hat man

$$x(x - 24) = 35^2 \text{ oder } x^2 - 24x - 1225 = 0,$$

also $x = 12 \pm \sqrt{144 + 1225} = 12 \pm \sqrt{1369}$,

und somit $x = 12 \pm 37$, d. h. $x_1 = 49$ und $x_2 = -25$.

Der Wert x_2 ist nicht verwendbar. Die Hypotenuse ist also 49 cm lang.

*) Vgl. Müller und Kutnewsky, Aufgabensammlung, A Nr. 32, 14–18.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.


UNIVERSITY OF CHICAGO
106 577 878